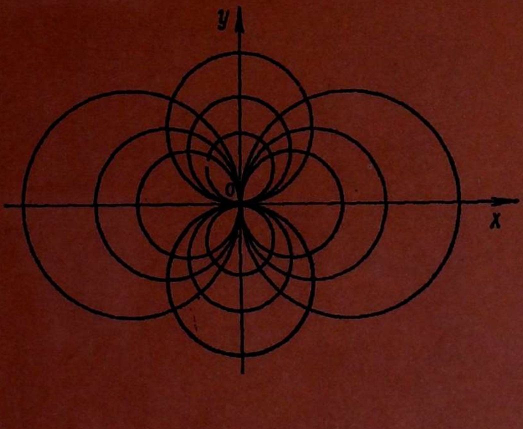
КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН БИЛИМ БЕРҮҮ
ЖАНА ИЛИМ МИНИСТРЛИГИ

ТУРСУНОВ Д.А.

БИРИНЧИ ТАРТИПТЕГИ КАДИМКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР



	-
	1
	-

олжности)

фамилией известного н
совпадающие с назван
сходные с ними до сте
смешения со словесны и
обслуживания) други эи
товаров, охраняемым
тождественных или онем

Каков ср полнон

ого, зарег

нования мо

Право н

ла составлен

в определен

но, в субботу

нт) по адресу:

ктуальной собс

Кыргызской Ре

меновaние ?

КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН БИЛИМ БЕРҮҮ ЖАНА ИЛИМ МИНИСТРЛИГИ

Ош мамлекеттик университети

Математика жана маалыматтык технологиялар факультети

ТУРСУНОВ Д.А.

БИРИНЧИ ТАРТИПТЕГИ КАДИМКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР

окуу колдонмо

Ош - 2009

УДК 517.2
ББК 22.161.6
Т 88

ОшМУнун математика жана маалыматтык технологиялар факультетинин окумуштуулар кеңеши тарабынан басмага сунушталган.

Рецензенттер:

Алымкулов К. - физика-математика илимдеринин доктору, профессор.

Жээнтаева Ж.К. - физика-математика илимдеринин кандидаты, доцент, Кыргыз-Өзбек Университетинин жогорку математика жана математикалык моделдештирүү кафедрасынын башчысы.

Турсунов Д.А.
Т-88 Биринчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдемелер/ОшМУ. –Ош:2009. 88бет.

Окуу колдонмо «математика», «колдонмо математика жана информатика», «физика», «информатика», «колдонмо информатика» адистиктери боюнча окуган студенттер үчүн сунушталат.

Окуу колдонмо дифференциалдык теңдемелер предметинин негизги бөлүгү болгон биринчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдемелерди камтыйт.

УДК 517.2
ББК 22.161.6

Мазмуну

Киришүү

Дифференциалдык теңдемелер кадимки дифференциалдык теңдемелер жана жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер болуп эки түргө бөлүнөт.

Эгерде белгисиз, изделүүчү функция бир өзгөрүлмөлүү болсо, анда ал кадимки дифференциалдык теңдеме деп аталат. Мындай теңдемеге функциянын өзү гана эмес анын ар түрдүү тартиптеги туундусу кирет.

Эгерде белгисиз, изделүүчү функция көп өзгөрүлмөлүү болсо, анда теңдеме жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме деп аталат.

Дифференциалдык теңдеме деген түшүнүктү алгач Г.Лейбниц (1676ж) сунуш кылган. 18 кылымда дифференциалдык теңдемелердин назариясы матанализден өз алдынча тармак катары бөлүнүп чыккан. Анын өнүгүшү И.Бернулли, Ж.Лагранж, Л.Эйлер жана башкалардын ысымдары менен тыгыз байланышкан.

Дифференциалдык теңдемелер физика, астрономия, химия, экономика, биология, медицина, техникада кеңири колдонулат.

Кадимки дифференциалдык теңдемелер табиат тануу жана техниканын көп маселелерин изилдөөдө кубаттуу курал болуп саналат.

Окуу колдонмодо биринчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдемелер каралган.

ШАРТТУУ БЕЛГИЛӨӨЛӨР

$\forall$ - каалагандай, бардык

$\exists$ - жашайт, табылат

! - жалгыз

$\Rightarrow$ - келип чыгат

$\wedge$ - жана

$\vee$ - же

$\Leftrightarrow$ - зарыл жана жетиштүү

Def - аныктама.

§1. Негизги түшүнүктөр жана аныктамалар

Def. $F(x,y,y') = 0$, (1) көрүнүшүндөгү теңдеме *биринчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдеме* деп аталат. Мында F — үч өзгөрүлмөлүү белгилүү функция, x — эркүүү өзгөрүлмө, y — белгисиз (изделүүчү) функция жана $y'=dy/dx$ — анын туундусу.

$F(x, y, y') = 0$ – теңдеменин айкын эмес көрүнүшү.

Туундуга карата чечилген дифференциалдык теңдеменин нормалдык формасы

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \tag{1.1}$$

көрүнүшүндө болот.

$f(x,y)$ функциясы чексизге айланган чекиттердин чекебелинде (1.1)дин аңтарылган теңдемесин карайбыз:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)}. \tag{1.2}$$

Көпчүлүк учурда (1.1) жана (1.2) нин ордуна аларга тең күчтүү болгон бир эле теңдемени караган максатка ылайыктуу болот:

$$dy-f(x,y)dx=0. \tag{1.3}$$

(1.3) - теңдеменин дифференциалдык формасы деп аталат, мында x жана y тең укуктуу. Алардын каалаган бирөөсүн эркүүү өзгөрүлмө катарында алсак болот.

Дифференциалдык теңдемелердин назариясында жана анын колдонулушунда көбүнчө дифференциалдык форманын жалпыраак көрүнүшү учурайт:

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0. \qquad (1.4)$$

(1.4) теңдеме $\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$, $\frac{dx}{dy}=-\frac{N(x,y)}{M(x,y)}$, теңдемелерге тең күчтүү. (1.4)түн $\frac{dx}{N(x,y)}=\frac{dy}{-M(x,y)}$ көрүнүшү симметриялык көрүнүштөгү теңдеме деп аталат.

(1.1), (1.2), (1.3), (1.4) көрүнүшүндөгү кадимки дифференциалдык теңдемелерди нормалдык формадагы (айкын көрүнүштөгү) теңдемелер деп аташат.

Def. Эгерде $\forall x\in(a,\ b)$ үчүн $y=\varphi(x)$ функциясын жана анын туундусун (1.1)ге койгондо аны теңдештикке айландырса, анда ал (1.1)дин $(a,\ b)$ дагы *чечими* деп аталат.

Чечим айкын, айкын эмес жана параметрдик көрүнүштө алынышы мүмкүн.

Def. Эгерде $\Phi(x,y,C)=0$ катышында $y(x)$ айкын эмес функция катарында (1.1)дин чечими болсо, анда ал (1.1)дин жалпы интегралы деп аталат. Мында С – каалагандай турактуу.

Жеке интеграл жалпы интегралдан С нын жеке маанисинде келип чыгат.

Def. Жалпы интегралда кармалбаган чечим *өзгөчө* чечим деп аталат.

Def.Дифференциалдык теңдеменин чечиминин графиги *интегралдык ийри* деп аталат.

(1.1) - теңдеме кандайдыр бир багыттардын талаасын аныктайт. Интегралдык ийринин ар бир чекитиндеги жанымасынын багыты ошол чекиттеги талаанын багыты менен дал келет. Интегралдык ийринин тегиздиктеги ийрилерден айрымасы да мына ушунда.

$y = \varphi(x)$ *функциясы* $x = x_0$ до $y = y_0$ маанисин кабыл алсын деген шарт *чечимдин баштапкы шарты* деп аталат.

Эгерде биринчи тартиптеги $y' = f(x, y)$, теңдеме чечимге ээ болсо, анда ал чечимдер чексиз көп болот жана ал чечимдер $y = \varphi(x,C)$, көрүнүшүндө жазылат, мында C — каалагандай турактуу.

$\varphi(x,C)$ туюнтмасы (1.1)дин жалпы чечими деп аталат эгерде:

- C нын кабыл ала турган бардык маанилеринде $y=\varphi(x,C)$ функция $y'=f(x, \varphi(x,C))$ теңдеменин чечими болсо;
- Чечимдин ар кандай баштапкы шарттарында $C = C_0$ турактуунун жалгыз гана мааниси табылып, $y=\varphi(x,C_0)$ функциясы $\varphi(x_0,C)=y_0$ баштапкы шартын канаатандырса.

$\varphi(x,C_0)$ туюнтмасы (1.1) дин жекече чечими деп аталат. Ал $y=\varphi(x,C)$ жалпы чечимден, $C=C_0$ турактуунун аныкталган маанисинде келип чыгат.

(1.1)дин баштапкы шартты канаттандыруучу жекече чечимин табуу маселеси *Кошинин маселеси* же *баштапкы маселе* деп аталат.

$y=\varphi(x,C)$ жалпы чечим геометриялык жактан Oxy тегиздигинде С эрктүү турактуудан көз каранды болгон интегралдык ийрилердин системасын берет. $\varphi(x,C_0)$ - жекече чечим болсо (x_0,y_0) чекити аркылуу өтүүчү, системага таандык болгон, бир интегралдык ийрини берет.

$$\varphi(x,y,c_1,c_2,...,c_n)=0, \qquad \textbf{(1.5)}$$

ийрилердин тобун канаатандырган дифференциалдык теңдемелерди түзүү үчүн (1.5)ти n жолу дифференцирлөө керек, мында $y=y(x)$ деп эсептейбиз. Келип чыкан теңдемелерден жана (1.5)тен $c_1, c_2,\ldots,c_n$ турактууларды жоюу керек.

Мисал. $c_1x+(y-c_2)^2=0$ (1.6)

ийрилердин тобунун дифференциалдык теңдемесин түзгүлө.

Чыгаруу. Теңдемеде эки турактуу катышкандыктан, аны эки жолу дифференцирлейбиз, (y(x) деп эсептейбиз)

$c_1+2(y-c_2)y'=0$ (1.7)

$2y'^2+2(y-c_2)y''=0$ (1.8)

(1.6), (1.7), (1.8) ден c_1, c_2 турактууларды жоебуз:

(1.8)ден: $(y-c_2)=-y'^2/y''$.

(1.7)ден: $c_1=-2(y-c_2)y'=2y'^3/y''$.

Аларды (1.6)га алып барып коебуз:

$$\frac{2y'^3}{y''}x+\frac{y'^4}{y''^2}=0 \Rightarrow y'+2y''x=0.$$

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

1) $y'=f(x,y)$ теңдемесинин чечиминин экстремум чекиттери боло турган (x,y) чекиттердин геометриялык ордунун теңдемесин жазгыла.

2) Төмөндөгү теңдемелердин интегралдык ийрилерин ийилүү чекиттеринин геометриялык ордунун теңдемесин жазгыла:

а) $y'=y-x^2$ б) $y'=x-e^y$ в) $x^2+y^2y'=1$ г) $y'=f(x,y)$.

3-14 маселелерде берилген ийрилер тобунун дифференциалдык теңдемесин түзгүлө.

3) $y=e^{Cx}$. **4)** $y=(x-C)^3$. 5) $y=Cx^3$.

6) $y=\sin(x+C)$. **7)** $x^2+Cy^2=2y$. **8)** $y^2+Cx=x^3$.

9) $y=C(x-C)^2$. **10)** $Cy=\sin Cx$. **11)** $y=ax^2+be^x$.

12) $(x-a)^2+by^2=1$. **13)** $\ln y=ax+by$. **14)** $y=ax^3+bx^2+cx$.

15) Радиусу 1 ге барабар болгон, борбору $y=2x$ түз сызыгында жаткан айланалардын дифференциалдык теңдемесин түзгүлө.

16) Огу oy огуна паралелл жана бир убакытта $y=0$, $x=y$ түздөрү жаныма болгон параболалардын дифференциалдык теңдемесин түзгүлө.

17) Биринчи жана үчүнчү чейректе жайгашкан, бир убакытта $y=0$ жана $x=0$ түздөрү жаныма болгон айланалардын дифференциалдык теңдемесин түзгүлө.

18) Координата борбору аркылуу өткөн жана огу oy огуна паралелл болгон бардык параболалардын дифференциалдык теңдемесин түзгүлө.

19) Абсцисса огун жанып өткөн бардык айланалардын дифференциалдык теңдемесин түзгүлө.

Жооптор.

1) $f(x,y)=0,\ f'_x(x,y)<0$ – *максимум*, $f'_x(x,y)>0$ – *минимум*.

2) **а)** $y=x^2+2x$; **б)** $x=e^y+e^{-y}$; **в)** $xy^3=-(1-x^2)^2;\ y=0$; г) $f'_x+f\cdot f'_y=0$. **3)** $y=e^{xy'/y}$. **4)** $y'=3y^{2/3}$. 5) $xy'=3y$. **6)** $y^2+y'^2=1$.

7) $x^2y'-xy=yy'$. **8)** $2xyy'-y^2=2x^3$. **9)** $y'^3=4y(xy'-2y)$.

10) $y'=\cos\left(\left(x\sqrt{1-y'^2}\right)/y\right)$. **11)** $x(x-2)y''-(x^2-2)y'+2(x-1)y=0$.

12) $(yy''+y'^2)^2=-y^3y''$. **13)** $y''y^2(\ln y-1)=y'^2(xy'-y)$.

14) $x^3y'''-3x^2y''+6xy'-6y=0$. **15)** $(y-2x)^2(y'^2+1)=(2y'^2+1)^2$.

16) $xy'^2=y(2y'-1)$. **17)** $(xy'-y)^2=2xy(y'^2+1)$. **18)** $x^2y''-2xy'+2y=0$.

19) $(y''y+y'^2+1)^2=(y'^2+1)^3$.

§2. Толук эмес теңдемелер

2.1 Изделүүчү функцияны кармабаган теңдеме.

$$y'(x) = f(x), \tag{2.1}$$

Теңдемесин карайбыз, бул теңдеменин оң жагы изделүүчү функциядан көз каранды эмес. Бул теңдеме эң жөнөкөй 1-тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдемелердин бири болуп эсептелет. Мейли $f(x)$ функциясы (a,b) интервалында үзгүлтүксүз болсун. Анда $y = \int f(x)dx + c$ функциясы (2.1) теңдеменин $D = \{(x,y) : a < x < b, -\infty < y < \infty\}$ аймагындагы жалпы чечими болот. D аймагы кесилишпөөчү интегралдык ийрилер менен толот. Өзгөчө чечими жок.

Эгерде (2.1) теңдемеге $y(x_0) = y^o$ баштапкы шарт коюлса, анда (2.1)ди dx га көбөйтүп, x_0 дон x га чейин интегралдайбыз:

$$\int_{x_0}^{x} dy = \int_{x_0}^{x} f(x)dx \Rightarrow y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx \Rightarrow y(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + y^0,$$

бул (2.1) дин D аймагындагы Коши формасындагы чечими деп аталат.

Эгерде (2.1) теңдеменин оң жагы (a,b) интервалынын $x = \xi$ чекитинен башка бардык чекиттеринде үзгүлтүксүз болуп, бул чекитте чексизге айланса, анда бул чекиттин чекебелинде (2.1)дин ордуна

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x)}, \tag{2.2}$$

теңдемесин кароо керек. $x=\xi$ түз сызыгы (2.2)нин чечими болот. Бул чечимди (2.1) дин чечимине бириктирүү керек. $x=\xi$ чечими жекече же өзгөчө болушу мүмкүн. Ал чечимдин ар бир чекитинде, Коши маселесинин чечиминин жалгыздыгынын бузулушунан же сакталышынан көз каранды болот.

Эгерде $x=\xi$ чечими жекече чечим болсо, анда ал жалпы чечимден $c=\infty\ (-\infty)$ маанисинде келип чыгат (б.а. $\lim\limits_{(x,y)\to(\xi,y)}\left(y-\int f(x)dx\right)=\infty\ (-\infty)$), а эгерде өзгөчө чечим болсо, анда $c=c(y)$ маанисинде (б.а. $\lim\limits_{(x,y)\to(\xi,y)}\left(y-\int f(x)dx\right)=c(y)$).

<u>Мисал 1</u>. $y'=-1/x^2$. Бул теңдеменин оң жагы x=0 чекитинен башка бардык чекиттерде үзгүлтүксүз. $-\infty<x<0,-\infty<y<\infty$ жана $0<x<\infty,-\infty<y<\infty$ аймактардын ар биринде теңдеменин жалпы чечими $y=1/x+c$ болот. x=0 түз сызыгы $\frac{dx}{dy}=-x^2$ теңдемесинин чечими болот. Бул чечим жекече чечим болот, себеби жалпы чечимге $c=\infty$ ди койгондо $x=0$ келип чыгат ($\lim\limits_{(x,y)\to(0,y)}\left(y-\frac{1}{x}\right)=\infty$).

<u>Мисал 2</u>. $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. Теңдеменин оң жагы $x=0$ чекитинен башка бардык чекиттерде үзгүлтүксүз. $-\infty<x<0,-\infty<y<\infty$

жана $0 < x < \infty, -\infty < y < \infty$ аймактардын ар биринде теңдеменин жалпы чечими $y = \sqrt[3]{x^2} + c$ болот. $x=0$ түз сызыгы $\frac{dx}{dy} = \frac{3\sqrt[3]{x}}{2}$ теңдемесинин чечими болот. Бул чечим өзгөчө чечим, себеби $c=y$ болгондо жалпы чечимден $x=0$ чечим келип чыгат ($\lim\limits_{(x,y)\to(0,y)} \left(y - \sqrt[3]{x^2}\right) = y$).

2.2 Эрктүү өзгөрүлмөнү кармабаган теңдеме

Эрктүү өзгөрүлмө x ти кармабаган теңдеме

$$\frac{dy}{dx} = f(y), \tag{2.3}$$

көрүнүшүндө болот. Мейли $f(y)$ функциясы (c,d) интервалында аныкталган жана үзгүлтүксүз болсун. Аңтарылган теңдемеге кайрылабыз:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}. \tag{2.4}$$

(2.4) изделүүчү функцияны кармабайт, ошондуктан ал үчүн (2.1)де айтылгандардын баары орун алат.

Мейли $f(y)$ функциясы (c,d) интервалынын бир да чекитинде нөлгө айланбасын. Анда (2.4) теңдеменин оң жагы (c,d) да аныкталган жана үзгүлтүксүз болот, андан сырткары $-\infty < x < \infty,\ c < y < d$ аймакта $x = \int \frac{dy}{f(y)} + c$ функциясы (2.4)түн жалпы чечими болот. Бул жалпы интегралды Коши формасындагы $x=\int\limits_{y_0}^{y}\frac{dy}{f(y)}+x_0$ жалпы интеграл менен алмаштырууга болот.

Мисал 3. $y'=2\sqrt{|y|}$. Теңдеменин оң жагы y тин бардык чектүү маанилеринде аныкталган жана үзгүлтүксүз, бирок ал $y=0$ до нолго айланат. Ошондуктан ox огу гана өзгөчө чечим болушу мүмкүн.

$$y'=2\sqrt{|y|}\Leftrightarrow\begin{cases}y'=2\sqrt{y}, \text{ эгер } y\geq 0\\ y'=2\sqrt{-y}, \text{ эгер } y\leq 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}y=(x+c)^2,(x>-c), -\infty<x<\infty, 0<y<\infty\\ y=-(x+c)^2,(x<-c), -\infty<x<\infty, -\infty<y<0\end{cases}$$

$y=0$ өзгөчө чечим болот, себеби жалпы чечимден $c=-x$ болгондо келип чыгат.

Мисал 4. $y'=1/2y$ (өз алдынча иштөө үчүн сунушталат).

§3. Өзгөрүлмөлөрү бөлүктөнгөн жана ага келтирилүүчү теңдемелер

$$f_1(x)\,dx = f_2(y)\,dy \qquad (3.1)$$

көрүнүшүндөгү теңдеме өзгөрүлмөлөрү бөлүктөнгөн деп аталат.

мында $f_1(x)$ жана $f_2(y)$ — үзгүлтүксүз функциялар.

Бул жерде x жана y өзгөрүлмө деп эсептелет, (3.1) мындай теңдемелердин эң жөнөкөй түрү. Анын чечими түздөн-түз итегралдоодон келип чыгат:

$$\int f_1(x)\,dx - \int f_2(y)\,dy = \mathrm{c},\ \text{же}\ \int_{x_0}^{x} f_1(x)dx - \int_{y_0}^{y} f_2(y)dy = c$$

мында c - эрктүү турактуу. (3.1) дин өзгөчө чечимдери жок.

Эгерде (3.1)ге Кошинин маселеси коюлса, анда анын чечими

$\int_{x_0}^{x} f_1(x)dx - \int_{y_0}^{y} f_2(y)dy = 0$ көрүнүшүндө болот.

Def. Өзгөрүлмөлөрү бөлүктөнүүчү теңдемелер деп

$$y' = \mathrm{P}(x)\,Q(y) \ \text{ же } \ p_1(x)p_2(y)dx + q_1(x)q_2(y)dy = 0 \quad (3.2)$$

көрүнүшүндөгү теңдемени айтабыз.

(2.1)ди чыгаруу үчүн аны төмөндөгүдөй көрүнүштө жазып алабыз:

$$q_1(x)p_2(y)\left(\frac{p_1(x)}{q_1(x)}dx+\frac{q_2(y)}{p_2(y)}dy\right)=0.$$

Мындан

$$\frac{p_1(x)}{q_1(x)}dx+\frac{q_2(y)}{p_2(y)}dy=0, \qquad (3.3)$$

же $q_1(x)=0$ же $p_2(y)=0$.

(3.3)тү интегралдап, (3.2)нин жалпы чечимине ээ болобуз:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{p_1(s)}{q_1(s)}ds+\int_{y_0}^{y}\frac{q_2(s)}{p_2(s)}ds=c.$$

Эгер $q_1(x)=0$ же $p_2(y)=0$ду эске албасак, анда кээ бир (өзгөчө) чечимдерди жоготуп алышыбыз мүмкүн. Мисалы, $y=b$ болгондо, $p_2(b)=0$ болсун. Анда $y=b$ түз сызыгы теңдеменин чечими болот. Чындыгында эле, $dy=0$ жана (3.2)ге $p_2(b)=0$ ду койсок, теңдештикке ээ болобуз. x жана y ти тең укуктуу деп карап, ушунун өзүндөй эле, эгерде $q_1(a)=0$ болсо, $x=a$ дагы (3.2)нин чечими болот.

Эгерде $y=b$ жана $x=a$ чечимдер жалпы чечимден келип чыкпаса, анда алар (3.2)нин өзгөчө чечимдер болушат. $y=b$ чечиминен абсциссасы $x=a$ чекитин жана $x=a$ чечиминен ординатасы $y=b$ чекитин чыгарып салыш керек. Себеби $x=a$, $y=b$ чекиттеринде (3.2) теңдеме y' талаанын жантыгын аныктабайт.

Ошондуктан $y=b(x\neq a)$ жана $x=a(y\neq b)$ чечимдер өзгөчө болушу мүмкүн, башка өзгөчө чечимдерге ээ эмес.

Көпчүлүк дифференциалдык теңдемелер өзгөрүлмөлөрүн алмаштыруу менен өзгөрүлмөлөрү бөлүктөнүүчүгө келет. Мисалы, $\frac{dy}{dx} = f(ax+by)$, $(a,b$ – const) көрүнүшүндөгү теңдемелерге, $z = ax+by$ өзгөртүп түзүүсүнүн колдонсок, $z' = a+by'$ болот, мындан $y' = (z'-a)/b$. Бул учурда теңдеме $z'-a = bf(z)$ көрүнүшкө келет, ал өзгөрүлмөлөрү бөлүктөнүүчү теңдеме болот. Мындан $\frac{dz}{a+bf(z)} = dx \Rightarrow x = \int \frac{dz}{a+bf(z)} + c$ чечимин алабыз.

Мисал 1. $(x+1)ydx+(y^2+1)xdy=0$ теңдемесин чыгаргыла.

Чыгаруу. Өзгөрүлмөлөрүн ажыратып, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$xy\left(\frac{x+1}{x}dx + \frac{y^2+1}{y}dy\right) = 0.$$

Мындан $\frac{x+1}{x}dx + \frac{y^2+1}{y}dy = 0$ же $x=0$ же $y=0$ ду алабыз.

$\frac{x+1}{x}dx + \frac{y^2+1}{y}dy = 0$ теңдемесин интегралдайбыз:

$$\int\frac{x+1}{x}dx + \int\frac{y^2+1}{y}dy = c.$$

Интегралдап $x + \ln|x| + \frac{y^2}{2} + \ln|y| = c$ жалпы чечимди алабыз.

Бул жерде $y=y(x)$, теңдеме жалпы чечимден башка $x=0$ жана $y=0$ деген өзгөчө чыгарылыштарга да ээ.

Мисал 2. Теңдемени чыгаргыла $y' = y / x$.

Чыгаруу. Берилген теңдемеде $P(x) = 1/x$, $Q(y) = y$.

өзгөрүлмөлөрүн ажыратып, $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$, га ээ болобуз жана аны интегралдайбыз:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + c,\ c - const\ \Rightarrow ln|y| = ln|x| + ln|c| \Rightarrow y = cx.$$

Мисал 3. $y' = 2x + y$.

Чыгаруу. $z = 2x + y,\ y' = z' - 2$ теңдемеге койсок,

$z' - 2 = z \Rightarrow \frac{dz}{z+2} = dx \Rightarrow \ln|z+2| = x + \ln c \Rightarrow z = -2 + ce^x$, алгачкы y өзгөрүлмөсүнө кайтабыз: $y = ce^x - 2x - 2$.

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

1) $xydx + (x+1)dy = 0$.

2) $\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy$.

3) $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0;\ y(0) = 1$.

4) $y'ctgx + y = 2;\ y(0) = -1$.

5) $y' = 3\sqrt[3]{y^2};\ y(2) = 0$.

6) $xy' + y = y^2;\ y(1) = 0{,}5$.

7) $2x^2yy' + y^2 = 2$.

8) $y' - xy^2 = 2xy$.

9) $e^{-s}(1 + \frac{ds}{dt}) = 1$.

10) $z' = 10^{x+z}$.

11) $x\frac{dx}{dt} + t = 1$.

12) $y' = \cos(y - x)$.

13) $y' - y = 2x - 3$.

14) $(x + 2y)y' = 1;\ y(0) = -1$.

15) $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$. **16)** $x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$.

17) $\sin x dy - y \ln y dx = 0$. **18)** $x^2 y' - \cos 2y = 1;\ y(+\infty) = 9\pi/4$.

19) $3y^2 y' + 16x = 2xy^3;\ x \to +\infty$ *де* $y(x)$ *чектелген.* **20)** $x^2 y^2 y' + 1 = y$.

21) 10 литр суусу бар идишке үзгүлтүксүз минутасына 2л ылдамдык менен аралашма агып түшөт. Аралашманын ар бир литринде 0,3кг туз бар. Идишке агып түшкөн аралашма суу менен аралашып ошондой ылдамдык менен агып чыгып кетет. 5 минутадан кийин идиште канча туз болот?

22) Абсцисса огу, жаныма жана жануу чекиттин ординатасы менен түзүлгөн уч бурчтуктун аянты турактуу a^2 ка барабар болгон ийрилерди тапкыла.

23) Абсцисса огу, жаныма жана жаныма чекиттин ординатасы менен түзүлгөн үч бурчтуктун катеттеринин суммасы турактуу *b* га барабар болгон ийрилерди тапкыла.

24) Ийринин каалаган чекити аркылуу жүргүзүлгөн жаныма жана нормаль абсцисса огу менен кесилишкенде узундугу 2a га барабар болгон кесиндини пайда кылуучу ийрилерди тапкыла.

25) Ийринин каалаган жанымасынын абсцисса огу менен кесилишкен чекитинин абсциссасы жаныма чекиттин абсциссасынан 2 эсе кичине болгон ийрилерди тапкыла.

26) Ийринин каалаган чекити аркылуу окторго паралелл түз сызыктарды жүргүзсө (октор менен кесилишкенге чейин), пайда болгон тик бурчтун аянтын ийри 1:2 катышта бөлө турган ийрилерди тапкыла.

27) Ийринин каалаган чекити аркылуу өткөн жаныма уюлдук радиус жана уюлдук ок менен бирдей бурчту түзгөн ийрилерди тапкыла.

28) Ылдамдыгы v_0=400м⁄с болгон ок, калыңдыгы h=20см болгон дубалды тешип, дубалдан v_1=100 м⁄с ылдамдык менен учуп чыкты. Эгерде дубалдын каршылык күчү октун ылдамдыгынын квадратына пропорционалдуу болсо, октун дубалдын ичинде аракеттенген T убактысын тапкыла.

Жооптор .

1) $y=c(x+1)e^{-x}$; $x=-1$. **2)** $\ln|x|=c+\sqrt{y^2+1}$; $x=0$.

3) $y(\ln|x^2-1|+c)=1$, $y=0$; $y(\ln(1-x^2)+1)=1$.

4) $y=2+c\cos x$; $y=2-3\cos x$. **5)** $y=(x-c)^3$; $y=0$; $y=(x-2)^3$; $y=0$.

6) $y(1-cx)=1$; $y=0$; $y(1+x)=1$. **7)** $y^2-2=ce^{1/x}$.

8) $\left(ce^{-x^2}-1\right)y=2$; $y=0$. **9)** $e^{-s}=1+ce^{t}$. **10)** $z=-\lg(c-10^x)$.

11) $x^2+t^2-2t=c$. **12)** $ctg\frac{y-x}{2}=x+c$; $y-x=2\pi k, k\in Z$.

13) $2x+y-1=ce^x$. **14)** $x+2y+2=ce^y$; $x+2y+2=0$.

15) $\sqrt{4x+2y-1}-2\ln(\sqrt{4x+2y-1}+2)=x+c$.

16) $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=c\ (c>0)$; $y=\pm1\ (-1<x<1)$, $x=\pm1\ (-1<y<1)$.

17) $y=e^{c_1 tg(x/2)}$. **18)** $y=\operatorname{arctg}(1-2/x)+2\pi$. **19)** $y=2$.

20) $y^2/2+y+\ln|y-1|+1/x=c;\ y=1.$

21) $y'=0.6-0.2y,\ y(0)=0,\ y(5)\approx 1.9\,кг$. **22)** $(c\pm x)y=2a^2$.

23) $b\ln y-y=\pm x+c,\ 0<y<b$. **24)** $a\ln\left(a\pm\sqrt{a^2-y^2}\right)\mp\sqrt{a^2-y^2}=x+c$.

25) $y=cx^2$. **26)** $y=cx^2,\ y^2=cx$. **27)** $r(1\pm\cos\varphi)=c$.

28) $mv'=-kv^2,\ T=\dfrac{h}{\ln(v_0/v_1)}\left(\dfrac{1}{v_1}-\dfrac{1}{v_0}\right),\ T=0.00108\,сек.$

§4. Бир тектүү теңдемелер

Def. Эгерде каалаган t үчүн $f(tx,ty)=t^k f(x,y)$ теңдештиги орун алса, анда $f(x,y)$ функциясы $к$ – ченемдүү бир тектүү функция деп аталат.

Эгерде $f(x,y)$ функциясы $к$ - даражадагы бир тектүү функция болсо, анда $f(x,y)=x^m f(1,y/x)$ барабардыгы орун алат.

Төмөндөгүдөй теңдемени карайбыз

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0, \tag{4.1}$$

мында $M(x,y)$, $N(x,y)$ - функциялары бирдей ченемдүүлүктөгү бир тектүү функциялар. Мындай теңдемелер бир текүү теңдемелер деп аталат.

(4.1)ди

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right), \tag{4.2}$$

көрүнүшүндө жазууга болот. Чындыгында

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}=-\frac{x^k M(1,y/x)}{x^k N(1,y/x)}=-\frac{M(1,y/x)}{N(1,y/x)}\equiv\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

(4.2)ден көрүнүп тургандай, координата башталышында бир тектүү теңдеме талаанын анык бир багытын бербейт. Бул деген координата башталышы аркылуу бир да интегралдык ийри өтпөйт дешенди түшүндүрөт. Бир тектүү теңдемелердин интегралдык ийрилеринин координата башталышындагы абалы атайын изилдөөнү талап кылат.

Бир тектүү теңдемелерди (4.1)ди интегралдоо үчүн $y=zx$ өзгөртүп түзүүсүн колдонобуз, мында z – жаңы изделүүчү функция.

$y = zx \Rightarrow y' = z'x + z$ буларды (4.2)ге койсок

$z'x + z = \varphi(z) \Rightarrow \dfrac{dz}{\varphi(z) - z} = \dfrac{dx}{x}$ теңдемесин алабыз.

Акыркы теңдемени интегралдап $ln|x| = \int \dfrac{dz}{\varphi(z) - z} + ln|c|$ ны, эгерде $\psi(z) = \int \dfrac{dz}{\varphi(z) - z}$ деп алсак, анда $x = ce^{\psi(z)}$ны алабыз. z ти y/x менен алмаштырып (4.2)нин жалпы чечимин табабыз: $x = ce^{\psi(y/x)}$.

Биз теңдемени $\varphi(z) - z$ ге жана x ге бөлүп жибердик, ошондуктан $\varphi(z) - z = 0$ теңдеменин тамырлары жана $x=0$ өзгөчө чечимдер болушу мүмкүн. Бир тектүү теңдеме башка өзгөчө чечимдерге ээ эмес.

Мисал. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + 1$.

Чыгаруу. $y = zx,\ y' = z'x + z,\quad z'x + z = z + 1 \Rightarrow z'x = 1 \Rightarrow dz = dx / x$

$z = ln|x| + ln|c| \Rightarrow z = ln|cx| \Rightarrow y = x\,ln|cx|$.

Бир тектүү теңдемелерге келтирилүүчү теңдемелер. Төмөндөгүдөй теңдемени карайбыз:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right). \qquad (4.3)$$

Эгерде $c_1=c=0$ болсо, анда ал бир тектүү теңдеме болот, себеби

$$f\left(\frac{a_1x+b_1y}{ax+by}\right)=f\left(\frac{a_1+b_1y/x}{a+by/x}\right)=\varphi(y/x).$$

Мейли c, c_1 дин жок дегенде бирөөсү нөлдөн айрымалуу болсун жана $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0$ шарты аткарылсын.

(4.3)ду (4.2)ге алып келүү үчүн $x=\xi+\alpha,\ y=\eta+\beta$ өзгөртүп түзүүсүн колдонобуз, мында α,β - азырынча белгисиз турактуулар.

$x=\xi+\alpha,\ y=\eta+\beta \Rightarrow dx=d\xi,\ dy=d\eta$ бул маанилерди (4.3)гө алып барып коебуз:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=f\left(\frac{a_1\xi+b_1\eta+a_1\alpha+b_1\beta+c_1}{a\xi+b\eta+a\alpha+b\beta+c}\right), \tag{4.4}$$

α,β - турактууларды $\begin{cases} a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0 \\ a\alpha+b\beta+c=0 \end{cases}$ шарты канаатандыра тургандай кылып тандап алабыз. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0$ орун алгандыктан система жалгыз чечимге ээ болот. (4.4) төмөндөгүдөй көрүнүшкө ээ болот:

$\dfrac{d\eta}{d\xi}=f\left(\dfrac{a_1\xi+b_1\eta}{a\xi+b\eta}\right)$ бул теңдемени интегралдап, анан алгачкы x, y өзгөрүлмөлөрүнө кайтып (4.3)түн жалпы чечимин алабыз.

Эгерде $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} = 0$ болсо, анда $a_1 / a = b_1 / b = k$ болот, мындан $a_1 = ka, b_1 = kb$ га ээ болобуз. Ошондуктан (4.3)тү

$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{k(ax+by)+c_1}{ax+by+c}\right) \equiv g(ax+by)$ көрүнүшүндө жазууга болот.

Мындай учурда жаңы өзгөрүлмөнү $z=ax+by$ эрежеси боюнча киийребиз жана бул учурда биздин теңдеме $\frac{dz}{dx} = a + bg(z)$ көрүнүшкө келет, ал өзгөрүлмөлөрү бөлүктөнүүчү теңдеме.

Def. Эгерде бардык t лар үчүн $\begin{cases} M(tx, t^k y) = t^m M(x, y) \\ N(tx, t^k y) = t^{m-k+1} N(x, y) \end{cases}$ шарты орун алса, анда (4.1) жалпыланган бир тектүү теңдеме деп аталат.

Жалпыланган бир тектүү теңдеме $y = zx^k$ өзгөртүп түзүүсүнүн жардамында өзгөрүлмөлөрү бөлүктөнүүчү теңдемеге алып келинет.

Жалпыланган бир тектүү теңдеменин өзгөчө чечими $x = 0 (y \neq 0)$ жана $y = z_i x^k$ $(x \neq 0)$, бул жерде z_i - $M(1, z) + kN(1, z)z = 0$ теңдеменин тамырлары.

Мисал. $(6 - x^2 y^2)dx + x^2 dy = 0$ теңдеме жалпыланган бир тектүү теңдеме болот. Себеби $M(x, y) = 6 - x^2 y^2$, $N(x, y) = x^2$, функциялар үчүн

$$M(tx, t^{-1}y) = 6 - (tx)^2 (t^{-1}y)^2 = t^0 M(x, y),\ N(tx, t^{-1}y) = (tx)^2 = t^{0-(-1)+1} N(x, y)$$

барабардыгы орун алат. Өзгөрүлмөлөрүн ажыратуу үчүн

$y = zx^{-1} = z/x$ өзгөртүп түзүүсүн колдонобуз. Аны дифференцирлеп $dy = \frac{xdz - zdx}{x^2}$ барабардыгына ээ болобуз. Өзгөртүп түзүүнү жана анын дифференциалын теңдемеге коюп, төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$xdz - \left(z^2 + z - 6\right)dx = 0 \Rightarrow x\left(z^2 + z - 6\right)\left(\frac{dz}{z^2 + z - 6} - \frac{dx}{x}\right) = 0,$$

$$x = 0 \vee \; z^2 + z - 6 = 0 \;\; \vee \;\; \frac{dz}{z^2 + z - 6} - \frac{dx}{x} = 0.$$

Акыркысын интегралдап $z = \frac{2 + 3cx^5}{1 - cx^5}$ чечимине ээ болобуз.

y функциясына кайтып, берилген теңдеменин жалпы чечимин алабыз:

$$y = \frac{2 + 3cx^5}{x\left(1 - cx^5\right)}.$$

Эми $x = 0 \; (y \neq 0)$, $y = -3x \;\; (x \neq 0)$, $y = 2x \;\; (x \neq 0)$ чечимдери өзгөчө чечим болобу жокпу деген суроого жооп беребиз.

$c=0$ до $y=2x$, $c=\propto$ де $y=-3x$, $c=-\propto$ де $x=0$ болгондуктан алар өзгөчө эмес, тагыраак айтканда жекече чечимдер болушат.

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр.

1) $(x + 2y)dx - xdy = 0.$ **2)** $(x - y)dx + (x + y)dy = 0.$

3) $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0.$ **4)** $2x^3 y' = y(2x^2 - y^2).$

5) $y^2 + x^2 y' = xyy'.$ **6)** $(x^2 + y^2)y' = 2xy.$

7) $xy' - y = xtg\dfrac{y}{x}$.   **8)** $xy' = y - xe^{y/x}$.

9) $xy' - y = (x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}$.   **10)** $xy' = y\cos\ln\dfrac{y}{x}$.

11) $(y + \sqrt{xy})dx = xdy$.   **12)** $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.

13) $(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0$.

14) $(2x + y + 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0$.

15) $x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0$.   **16)** $(x + 4y)y' = 2x + 3y - 5$.

17) $(y+2)dx = (2x + y - 4)dy$.   **18)** $y' = 2(\dfrac{y+2}{x+y-1})^2$.

19) $(y'+1)\ln\dfrac{y+x}{x+3} = \dfrac{y+x}{x+3}$.   **20)** $y' = \dfrac{y+2}{x+1} + tg\dfrac{y-2x}{x+1}$.

21) $x^3(y' - x) = y^2$.   **22)** $2x^2y' = y^3 + xy$.

23) $2xdy + (x^2y^4 + 1)ydx = 0$.   **24)** $ydx + x(2xy+1)dy = 0$.

25) $2y' + x = 4\sqrt{y}$.   **26)** $y' = y^2 - \dfrac{2}{x^2}$.

27) $2xy' + y = y^2\sqrt{x - x^2y^2}$.   **28)** $\dfrac{2}{3}xyy' = \sqrt{x^6 - y^4} + y^2$.

29) $2y + (x^2y + 1)xy' = 0$.

30) Ийринин каалаган чекити аркылуу жүргүзүлгөн жаныма менен абсцисса огунун кесилишкен чекити координата башталышынан жана жаныма чекитинен бирдей алыстыкта жаткан ийрилерди тапкыла.

31) Жанымадан координата башталышына чейинки аралык жаныма чекитинин абсциссасына барабар болгон ийрилерди тапкыла.

32) $y' = ax^{\alpha} + by^{\beta}$ теңдемеси α жана β нын кандай маанилеринде $y=z^m$ өзгөртүп түзүүсүнүн жардамында бир тектүүгө келтирилет.

Жооптор.

1) $x + y = cx^2;\ x = 0$. **2)** $\ln(x^2 + y^2) = c - 2arctg(y/x)$.

3) $x(y-x) = cy;\ y = 0$. **4)** $x = \pm y\sqrt{\ln cx};\ y = 0$. **5)** $y = ce^{y/x}$.

6) $y^2 - x^2 = cy,\ y = 0$. **7)** $\sin(y/x) = cx$. **8)** $y = -x\ln\ln cx$.

9) $\ln((x+y)/x) = cx$. **10)** $\ln cx = ctg\left(\frac{1}{2}\ln(y/x)\right);\ y = xe^{2\pi k},\ k \in Z$.

11) $x\ln cx = 2\sqrt{xy};\ y = 0; x = 0$. **12)** $\arcsin(y/x) = \ln cx \cdot \operatorname{sgn} x;\ y = \pm x$.

13) $(y-2x)^3 = c(y-x-1)^2;\ y = x+1$. **14)** $2x + y - 1 = ce^{2y-x}$.

15) $(y-x+2)^2 + 2x = c$. **16)** $(y-x+5)^5(x+2y-2) = c$.

17) $(y+2)^2 = c(x+y-1);\ y = 1-x$. **18)** $y + 2 = ce^{-2arctg((y+2)/(x-3))}$.

19) $\ln\frac{y+x}{x+3} = 1 + \frac{c}{x+y}$. **20)** $\sin\frac{y-2x}{x+1} = c(x+1)$.

21) $x^2 = (x^2 - y)\ln cx;\ y = x^2$. **22)** $x = -y^2\ln cx;\ y = 0$.

23) $x^2y^4\ln cx^2 = 1;\ y = 0; x = 0$. **24)** $y^2e^{-1/xy} = c;\ y = 0;\ x = 0$.

25) $(2\sqrt{y} - x)\ln c(2\sqrt{y} - x) = x;\ 2\sqrt{y} = x$. **26)** $1 - xy = cx^3(2 + xy);\ xy = -2$.

27) $2\sqrt{(1/xy^2) - 1} = -\ln cx;\ xy^2 = 1; y = 0$. **28)** $\arcsin\frac{y^2}{|x^3|} = \ln cx^3;\ |x^3| = y^2$.

29) $x^2y\ln cy = 1; y = 0$. **30)** $y = c(x^2 + y^2)$. **31)** $x^2 + y^2 = cx$. **32)** $\alpha - \beta = \alpha\beta$.

§5. Сызыктуу теңдемелер

Def. $p_0(x)y'+p_1(x)y-p_2(x)=0$ (5.1)

көрүнүшүндөгү теңдеме сызыктуу теңдеме деп аталат.

Эгерде каралып жаткан интервалда $p_0(x)$ нолдон айрымалуу болсо, анда (5.1) ди $p_0(x)$ ге бөлүп жиберебиз:

$$y'+p(x)y=q(x),\ \ (p(x)=p_1(x)/p_0(x),\ \ p_2(x)/p_0(x)). \qquad (5.2)$$

$p(x),\ q(x)$ – үзгүлтүксүз функциялар.

Эгерде $q(x)$ функциясы теңдеш түрдө нолго барабар болсо, анда

$$y'+p(x)y=0$$

теңдеме бир тектүү, эгерде бул шарт орун албаса, анда (5.2) бир тектүү эмес деп аталат.

Сызыктуу теңдемелердин чечимдерин бир канча усулдар менен тапса болот, мисалы, Лагранждын вариациалоо усулу, Бернуллинин усулу, Эйлердин усулу.

Бул усулдарды карап чыгабыз.

Лагранждын усулу. Бул усулдун мааниси төмөндөгүчө. Теңдеменин чечимин табуу үчүн алгач, тиешелүү бир тектүү теңдеменин чечими табылат.

$$y'+p(x)y=0 \Rightarrow \frac{dy}{y}+p(x)dx=0 \qquad (y=0)$$

аны интегралдап $y=ce^{-\int p(x)dx}$ табабыз. Мында c - эрктүү турактуу. Эрктүү турактууну вариациалайбыз б.а. $c=c(x)$ функция деп эсептейбиз, анда бир тектүүнүн чечими

$$y = c(x)e^{-\int p(x)dx} \tag{5.3}$$

көрүнүшүндө болот. (5.3)төн туунду алабыз:

$$y' = c'(x)e^{-\int p(x)dx} - c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}. \tag{5.4}$$

(5.3) жана (5.4)тү (5.2)ге алып барып коебуз:

$$c'(x)e^{-\int p(x)dx} - c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)c(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

$$c'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow c(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c.$$

$c(x)$ тин табылган маанисин (5.3)го коебуз:

$$y = \left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right]e^{-\int p(x)dx}. \tag{5.5}$$

(5.2)нин жалпы чечими (5.5) болот.

Эгерде $y(x_0) = y^0$ баштапкы шарты берилсе анда (5.5):

$$y = \left[\int_{x_0}^{x} q(t)e^{\int_{x_0}^{t} p(s)ds}dt + y^0\right]e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds}, \tag{5.6}$$

көрүнүшүнө ээ болот.

Бернуллинин усулу. (5.2)нин чечимин

$$y(x) = u(x)v(x) \tag{5.7}$$

көрүнүшүндө издейбиз, мында $u(x)$, $v(x)$ – азырынча белгисиз функциялар. (5.7)ден туунду алабыз: $y' = u'v + uv'$. (5.7)ни жана анын туундусун (5.2)ге алып барып коебуз: $u'v + (v' + p(x)v)u = q(x)$.

Мында $v(x)$ функциясын $v' + p(x)v = 0$ боло тургандай кылып тандап алабыз, анда $v(x) = e^{-\int p(x)dx}$ болот. Анда

$u' = q(x)e^{\int p(x)dx}$ га ээ болобуз, аны интегралдап $u(x)$ ны табабыз: $u = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c$.

$u(x),\ v(x)$ тин маанилерин (5.7)ге коюп (5.2) нин жалпы чечимин табабыз:

$$y = \left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right]e^{-\int p(x)dx}.$$

Эйлердин усулу. (5.2)ни $e^{\int p(x)dx}$ га көбөйтөбүз:

$y' + p(x)y = q(x) \mid * e^{\int p(x)dx}$,

$y'e^{\int p(x)dx} + p(x)ye^{\int p(x)dx} = q(x)e^{\int p(x)dx}$,

барабардыктын сол жагы толук туундуну берет,

$\left[yexp\left(\int p(x)dx\right)\right]' = q(x)exp\left(\int p(x)dx\right)$

барабардыкты интегралдайбыз

$ye^{\int p(x)dx} = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c$,

$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right]$ ти алабыз.

Мисал 1. $y'-2y/x = x$ теңдемесин жалпы чечимин табабыз.

Лагранждын усулу менен чыгарабыз.

Алгач тиешелүү бир тектүү теңдемени чыгарабыз:

$$z'\text{-}2z/x = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x} = 0 \Rightarrow \frac{z}{dx}\left(\frac{dz}{z} - \frac{2dx}{x}\right) = 0 \Rightarrow z = cx^2.$$

$c = c(x),\ y = c(x)x^2 \Rightarrow y' = c'(x)x^2 + 2xc(x)$ теңдемеге койсок:

$$c'(x)x^2 + 2xc(x) - \frac{2c(x)x^2}{x} = x \ \Rightarrow c'(x)x^2 = x \Rightarrow c'(x) = 1/x \Rightarrow c(x) = ln|x| + c,$$

Демек $y = x^2(ln|x| + c)$ болот.

Мисал 2. $xy'+2x^2y=1$ теңдеменин чечимин (5.5)ди пайдаланып жазабыз:

$p(x)=2x,\ q(x)=1/x$, (5.5)ге койсок:

$$y=\left[\int\frac{1}{x}e^{\int 2xdx}dx+c\right]e^{-\int 2xdx}=e^{-x^2}\left(c+\int\frac{1}{x}e^{x^2}dx\right).$$

Бернуллинин теңдемеси.

$$y'+p(x)y=q(x)y^m,\ m\in\Re \tag{5.8}$$

теңдемеси Бернуллинин теңдемеси деп аталат.

Мында $p(x), q(x)\in C_{(a,b)}$, $m\neq 0$, $m\neq 1$, себеби бул маанилерде Бернуллинин теңдемеси түздөн-түз сызыктуу теңдемеге айланат.

Бернуллинин теңдемесин $m\neq 1$ болгон учурда сызыктуу теңдемеге алып келебиз:

$y'+p(x)y=q(x)y^m$ теңдемени y^m ге бөлүп жиберебиз,

$$\frac{y'}{y^m}+p(x)\frac{1}{y^{m-1}}=q(x) \tag{5.9}$$

$z=\frac{1}{y^{m-1}}$ $\left(z'=-\frac{(m-1)y'}{y^m}\right)$ өзгөртүп түзүүсүн кийребиз:

$$-\frac{z'}{(m-1)}+p(x)z=q(x)\quad |\times(1-m),$$

$$z'+(1-m)p(x)z=(1-m)q(x).$$

Акыркы келип чыккан теңдеме сызыктуу теңдеме. (5.5)ти эске алсак, анда акыркы теңдеменин чечими:

$$y=\left(\left[\int(1-m)q(x)e^{\int(1-m)p(x)dx}dx+c\right]e^{-\int(1-m)p(x)dx}\right)^{1/(1-m)} \tag{5.10}$$

көрүнүшүндө болот.

y=0 түз сызыгы Бернуллинин теңдемесинин өзгөчө чечими болушу мүмкүн.

Мисал 1. $y' = y^2$, $y' = 2\sqrt{y}$ теңдемелерин карайлы.

y=0 түз сызыгы эки теңдемени да канаатандырат, теңдемелердин жалпы чечими: $-1/y = x + c$, $\sqrt{y} = x + c$ болот. Биринчисинде *y=0* чечими $c = \infty$, экинчисинде *c=-x* де келип чыгат. Ошондуктан *y=0* түз сызыгы биринчи теңдемеге жекече, ал эми экинчисине өзгөчө чечим болот.

Мисал 2. $y' + 2y = y^2 e^x$ теңдемесин чыгарабыз.

$$y' + 2y = y^2 e^x \qquad \Big| \div y^2$$

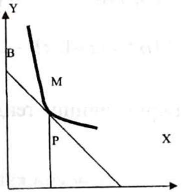
$$\frac{y'}{y^2} + \frac{2}{y} = e^x, \left(z = \frac{1}{y},\ z' = -\frac{y'}{y^2} \right), \quad z' - 2z = -e^x,$$

$$z = \left[-\int e^{x-2x} dx + c \right] e^{2x} = ce^{2x} + e^x,$$ *y* функциясына кайтабыз:

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{\left(ce^{2x} + e^x \right)}.$$

Мисал 3. РМ жаныма чекитинин ординатасынын квадраты, жаныма ордината огун кесип өткөндөгү ОВ кесиндисине барабар болгон ийрилерди тапкыла.

Чыгаруу. Мейли M(x,y) - y(x) функциясынын каалагандай чекити болсун.



M чекитиндеги жаныманын теңдемеси

$Y - y = y'(X - x)$ көрүнүшүндө болот.

$X=0$ деп $Y = y - xy'$ ти табабыз, демек $OB = y - xy'$. Маселенин шарты $y^2 = y - xy'$ же $y' - y/x = -y^2/x$ теңдемеге алып келет. Бул Бернуллинин теңдемеси, $p(x) = -1/x,\ q(x) = -1/x, m = 2$ болгон учур.

(5.10) ду пайдаланабыз:

$$y = \left(\left[\int \frac{1}{x} e^{\ln|x|} dx + c\right] e^{-\ln|x|}\right)^{-1} = \left([x+c]\frac{1}{x}\right)^{-1} = \frac{x}{x+c} \Rightarrow y = \frac{x}{x+c},$$ андан

сырткары $y=0$ $(x \neq 0)$ түздөрү дагы интегралдык ийри болушат. Демек изделүүчү ийрилер гиперболалар болушат $(c \neq 0)$, жана анын горизонталдык асимптоталары $y=1$ жана ox огу болот.

Риккатинин теңдемеси. $y' + p(x)y + q(x)y^2 = f(x)$ - Риккатинин теңдемеси деп аталат. Жалпы учурда квадратурада интегралданбайт. Бирок эгерде $y_1(x)$ – жекече чечими белгилүү болсо, анда аны $y = y_1(x) + z$ өзгөртүп түзүүсүн жардамында Бернуллинин тендемесине алып келсе болот.

Мисал. $y' = y^2 - 2/x^2$ - Риккатинин теңдемеси.

Чыгаруу. $y_1(x) = 1/x$ экендигин байкоо кыйын эмес. $y = 1/x + z$ өзгөртүп түзүүсүн колдонобуз. Теңдеме $z' - 1/x^2 = (z + 1/x)^2 - 2/x^2$ көрүнүшкө келет же $z' - \frac{2}{x}z = z^2$ - Бернуллинин теңдемеси. Анын чечими $\frac{1}{z} = \frac{c}{x^2} - \frac{x}{3}$ болот, y өзгөрүлмөсүнө кайтып $y = \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{c_1 - x^3}$ ты алабыз.

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

1) $xy'-2y=2x^4.$ **2)** $(2x+1)y'=4x+2y.$

3) $y'+ytgx=\sec x.$ **4)** $(xy+e^x)dx-xdy=0.$

5) $x^2y'+xy+1=0.$ **6)** $y=x(y'-x\cos x).$

7) $2x(x^2+y)dx=dy.$ **8)** $(xy'-1)\ln x=2y.$

9) $xy'+(x+1)y=3x^2e^{-x}.$ **10)** $(x+y^2)dy=ydx.$

11) $(2e^y-x)y'=1.$ **12)** $(\sin^2 y+xctgy)y'=1.$

13) $(2x+y)dy=ydx+4\ln ydy.$ **14)** $y'=\dfrac{y}{3x-y^2}.$

15) $(1-2xy)y'=y(y-1).$ **16)** $y'+2y=y^2e^x.$

17) $(x+1)(y'+y^2)=-y.$ **18)** $y'=y^4\cos x+ytgx.$

19) $xy^2y'=x^2+y^3.$ **20)** $xydy=(y^2+x)dx.$

21) $xy'-2x^2\sqrt{y}=4y.$ **22)** $xy'+2y+x^5y^3e^x=0.$

23) $2y'-\dfrac{x}{y}=\dfrac{xy}{x^2-1}.$ **24)** $y'x^3\sin y=xy'-2y.$

25) $(2x^2y\ln y-x)y'=y.$ **26)** $xdx=(x^2-2y+1)dy.$

27) $(x+1)(yy'-1)=y^2.$ **28)** $x(e^y-y')=2.$

29) $(x^2-1)y'\sin y+2x\cos y=2x-2x^3.$

30) $y(x)=\int\limits_0^x y(t)dt+x+1.$

31) $\int\limits_0^x (x-t)y(t)dt=2x+\int\limits_0^x y(t)dt.$

32)Координата октору, жанымa жана жанымa чекитинин ординатасы менен чектелген трапециянын аянты туруктуу чоңдук $3a^2$ га барабар болгон бардык ийрилерди тапкыла.

33)Абсцисса огу, жанымa жана жанымa чекитинен координата башталышына чейинки кесинди менен чектелген үч бурчтуктун аянты туруктуу чоңдук a^2 га барабар болгон ийрилерди тапкыла.

34)Биринчи тартиптеги сызыктуу теңдеменин эки $y_1(x)$, $y_2(x)$ ар түрдүү чечимдери берилген. Алар аркылуу теңдеменин жалпы чечимин туюнткула.

35) $y'\sin 2x = 2(y + \cos x)$ теңдемесинин $x \to \pi/2$де, чектелген чечимин тапкыла.

36) Мейли $xy' + ay = f(x)$ теңдемесинде, $a = const > 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = b$ болсун. Бул теңдеменин бир гана чечими $x \to 0$до чектелген экендигин көрсөткүлө жана анын $x \to 0$ догу пределин тапкыла.

37) Мейли $xy' + ay = f(x)$ теңдемесинде, $a = const < 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = b$ болсун. Бул теңдеменин бардык чечимдери $x \to 0$до чектүү бир гана пределге ээ экендигин көрсөткүлө жана аны тапкыла.

38) Эгерде $\forall t \in (-\infty, +\infty): |f(t)| \le M$ болсо, анда $\dfrac{dx}{dt} + x = f(t)$ теңдемеси $-\infty < t < \infty$де чектелген бир чечимге ээ экендигин көрсөткүлө. Бул чечимди тапкыла. Эгерде f(t) мезгилдүү болсо, анда табылган чечим да мезгилдүү экендигин көрсөткүлө.

39) $xy' - (2x^2+1)y = x^2$ теңдеменин бир гана чечими $x \to +\infty$де чектүү пределге умтулушун көрсөткүлө жана пределди тапкыла. Бул чечимди интеграл аркылуу туюнткула.

40) $y' = 2y\cos^2 x - \sin x$ теңдемесининин мезгилдүү чечимин тапкыла.

41) Мейли $x'(t) + a(t)x(t) = f(t)$, теңдемесинде $a(t) \ge c > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) \to 0$ болсун. Теңдеменин ар бир чечими үчүн $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = 0$ экендигин далилдегиле.

42-46 Риккатинин теңдемесин Бернуллинин теңдемесине алып келип чыгаргыла.

42) $x^2 y' + xy + x^2 y^2 = 4.$ **43)** $3y' + y^2 + \dfrac{2}{x^2} = 0.$

44) $xy' - (2x+1)y + y^2 = -x^2.$ **45)** $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2.$

46) $y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x.$

Жооптор.

1) $y = cx^2 + x^4.$ **2)** $y = (2x+1)(c + \ln|2x+1|) + 1.$ **3)** $y = \sin x + c\cos x.$

4) $y = e^x(\ln|x| + c);\ x = 0.$ **5)** $xy = c - \ln|x|.$ **6)** $y = x(c + \sin x).$

7) $y = ce^{x^2} - x^2 - 1.$ **8)** $y = c\ln^2 x - \ln x.$ **9)** $xy = (x^3 + c)e^{-x}.$

10) $x = y^2 + cy;\ y = 0.$ **11)** $x = e^y + ce^{-y}.$ **12)** $x = (c - \cos y)\sin y.$

13) $x = 2\ln y - y + 1 + cy^2.$ **14)** $x = cy^3 + y^2;\ y = 0.$

15) $(y-1)^2 x = y - \ln cy;\ y=0;\ y=1.$ **16)** $y(e^x + ce^{2x}) = 1;\ y=0.$

17) $y(x+1)(\ln|x+1|+c)=1; y=0.$ **18)** $y^{-3} = c\cos^3 x - 3\sin x\cos^2 x;\ y=0.$

19) $y^3 = cx^3 - 3x^2.$ **20)** $y^2 = cx^2 - 2x,\ x=0.$ **21)** $y = x^4 \ln^2 cx;\ y=0.$

22) $y^{-2} = x^4(2e^x + c);\ y=0.$ **23)** $y^2 = x^2 - 1 + c\sqrt{|x^2-1|}.$

24) $x^2(c-\cos y) = y;\ y=0.$ **25)** $xy(c-\ln^2 y) = 1.$ **26)** $x^2 = ce^{2y} + 2y.$

27) $y^2 = c(x+1)^2 - 2(x+1).$ **28)** $e^{-y} = cx^2 + x.$

29) $\cos y = (x^2-1)\ln c(x^2-1).$ **30)** $y = 2e^x - 1.$ **31)** $y = -2e^x.$

32) $xy = cx^3 + 2a^2.$ **33)** $xy = a^2 + cy^2.$ **34)** $y = y_1 + c(y_2 - y_1).$

35) $y = tgx - \sec x.$ **36)** $b/a.$ **37)** $b/a.$

38) $x(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{s-t} f(s)ds = \int_{-\infty}^{0} e^{z} f(z+t)dz.$

39) $y(x) = x\int_{+\infty}^{x} e^{x^2-t^2} dt \to -1/2,\ x \to +\infty$ де.

40) $y(x) = \int_{0}^{\infty} e^{-s-\sin s\cos(s+2x)}\sin(x+s)ds.$ **42)** $y = 2/x + 4/(cx^5 - x);\ y = 2/x.$

43) $y = 1/x + 1/(cx^{2/3} + x);\ y = 1/x.$ **44)** $y = x + x/(x+c);\ y = x.$

45) $y = x + 2 + 4/(ce^{4x} - 1);\ y = x+2.$ **46)** $y = e^x - 1/(x+c);\ y = e^x.$

§6. Толук дифференциалдагы теңдемелер

Def. Эгерде $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ (6.1)

теңдемеси үчүн

$$\frac{\partial M}{\partial y}\equiv\frac{\partial N}{\partial x} \qquad (*)$$

теңдештиги орун алса, анда (6.1) толук дифференциалдагы теңдеме деп аталат.

Толук дифференциалдагы теңдеменин сол жагы кандайдыр бир U функциясынын толук дифференциалын берет $dU=M(x,y)dx+N(x,y)dy$, мында $\frac{\partial U}{\partial x}=M(x,y)$, $\frac{\partial U}{\partial y}=N(x,y)$ болот. Экинчи тартиптеги аралаш туундулар $\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}$, барабар болгондуктан, (*) теңдештиги келип чыгат. (*) шарты (6.1)дин толук дифференциалдагы теңдеме болушунун зарыл жана жетиштүү шарты.

Мейли $M(x,y)$, $N(x,y)$ – функциялары тиешелүү түрдө y жана x боюнча үзгүлтүксүз туундуларга ээ болушсун. (6.1)дин жалпы чечимин тургузабыз.

$\frac{\partial U}{\partial x}=M(x,y)$ барабардыгын x боюнча интегралдайбыз:

$U=\int\limits_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\varphi(y)$, $\varphi(y)$- дифференцирленүүчү эрктүү

функция, аны биз $\frac{\partial U}{\partial y}=N(x,y)$ барабардыгы орун ала тургандай кылып тандап алабыз, б.а. $\dfrac{\partial U}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial}{\partial y}\int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \varphi'(y) = N(x,y)$ же

$\int\limits_{x_0}^{x} \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}dx + \varphi'(y) = N(x,y)$, (*) теңдештигин эске алсак:

$\int\limits_{x_0}^{x} \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}dx + \varphi'(y) = N(x,y)$ болот, мындан

$$N(x,y)\Big|_{x=x_0}^{x=x} + \varphi'(y) = N(x,y) \qquad \Rightarrow N(x,y) - N(x_0,y) + \varphi'(y) = N(x,y),$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = N(x_0,y) \Rightarrow \varphi(y) = \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy + c\,,\ c - const.$$

Демек $U = \int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy + c$.

(6.1)дин жалпы интегралы $\int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy = c$ же

$\int\limits_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x,y)dy = c$ болот.

Эгерде (6.1)ге $y(x_0) = y_0$ баштапкы шарт коюлса, анда анын жекече чечими $\int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy = 0$ же

$\int\limits_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x,y)dy = 0$ болот.

Мисал 1. $\left(x^3+y\right)dx+(x-y)dy=0$.

Теңдемеде $M(x,y)=x^3+y,\ N(x,y)=x-y$. (*) теңдештигин текшеребиз:

$\frac{\partial M}{\partial y}=1\equiv 1=\frac{\partial N}{\partial x}$ демек берилген теңдеме толук дифференциалдагы теңдеме. Анда анын чечими

$$\int_{x_0}^{x}\left(x^3+y\right)dx+\int_{y_0}^{y}(x_0-y)dy=c\Rightarrow\frac{x^4}{4}+yx-\frac{y^2}{2}=c_1$$ болот.

Мисал 2. $\left(2x+3x^2y\right)dx+\left(x^3-3y^2\right)dy=0$.

Теңдемеде $M(x,y)=2x+3x^2y,\ N(x,y)=x^3-3y^2$. (*) теңдештигин текшеребиз:

$\frac{\partial M}{\partial y}=3x^2\equiv 3x^2=\frac{\partial N}{\partial x}$ демек берилген теңдеме толук дифференциалдагы теңдеме. Анда анын чечими

$$\int_{x_0}^{x}\left(2x+3x^2y_0\right)dx+\int_{y_0}^{y}\left(x^3-3y^2\right)dy=c\ \Rightarrow x^2+x^3y-y^3=c_1.$$

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

1) $2xy^3dx+3\left(x^2y^2+y^2-1\right)dy=0$. **2)** $\left(x^3+3xy^2\right)dx+\left(y^3+3x^2y\right)dy=0$.

3) $\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$. **4)** $\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)dx-\frac{2ydy}{x}=0$.

5) $ydy=(xdy+ydx)\sqrt{1+y^2}$.

6) $\left(y\cos x+2xy^2\right)dx+\left(\sin x-a\sin y+2x^2y\right)dy=0$.

7) $\sqrt{a^2+y^2}dx+\dfrac{xy+a^2+2y^2}{\sqrt{a^2+y^2}}dy=0.$

8) $\left(3x^2y-2x^3+y^3\right)dx-\left(2y^3-3xy^2-x^3\right)dy=0.$

9) $\sin(x+y)dx+x\cos(x+y)(dx+dy)=0.$

10) $\left(6xy+x^2+3\right)y'+3y^2+2xy+2x=0.$

11) $2x^3yy'+3x^2y^2+7=0.$

12) $xy'\cos y+\sin y=0.$

13) $\left(xe^y+e^x\right)y'+e^y+ye^x=0.$

14) $\dfrac{2x}{y^3}dx+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0.$

15) $\dfrac{xdy}{x^2+y^2}=\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}-1\right)dx.$

16) $e^ydx+\left(xe^y-2y\right)dy=0.$

17) $yx^{y-1}dx+x^y\ln xdy=0.$

18) $\dfrac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{ydx-xdy}{x^2}.$

19) $\dfrac{y+\sin x\cos^2(xy)}{\cos^2(xy)}dx+\dfrac{x}{\cos^2(xy)}dy+\sin ydy=0.$

20) $\left(1+x\sqrt{x^2+y^2}\right)dx+\left(-1+\sqrt{x^2+y^2}\right)ydy=0.$

21) $2xy^3dx+3\left(x^2y^2+y^2-1\right)dy=0.$

22) $\left(x^3+3xy^2\right)dx+\left(y^3+3x^2y\right)dy=0.$

23) $\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)dy=0.$

24) $\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)dx-\frac{2ydy}{x}=0.$

25) $ydy=(xdy+ydx)\sqrt{1+y^2}.$

26) $(y\cos x+2xy^2)dx+(\sin x-a\sin y+2x^2y)dy=0.$

27) $\sqrt{a^2+y^2}dx+\frac{xy+a^2+2y^2}{\sqrt{a^2+y^2}}dy=0.$

28) $(3x^2y-2x^3+y^3)dx-(2y^3-3xy^2-x^3)dy=0.$

29) $\sin(x+y)dx+x\cos(x+y)(dx+dy)=0.$

30) $(6xy+x^2+3)y'+3y^2+2xy+2x=0.$

31) $2x^3yy'+3x^2y^2+7=0.$

32) $xy'\cos y+\sin y=0.$

33) $(xe^y+e^x)y'+e^y+ye^x=0.$

34) $\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0.$

35) $\frac{xdy}{x^2+y^2}=\left(\frac{y}{x^2+y^2}-1\right)dx.$

36) $e^ydx+(xe^y-2y)dy=0.$

37) $yx^{y-1}dx+x^y\ln xdy=0.$

38) $\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{ydx-xdy}{x^2}.$

39) $\frac{y+\sin x\cos^2(xy)}{\cos^2(xy)}dx+\frac{x}{\cos^2(xy)}dy+\sin ydy=0.$

40) $\left(1+x\sqrt{x^2+y^2}\right)dx+\left(-1+\sqrt{x^2+y^2}\right)ydy=0.$

Жооптор.

1) $x^2y^3+y^3-3y=C$. 2) $\frac{x^4}{4}+\frac{3}{2}x^2y^2+\frac{y^4}{4}=C$. 3) $x+ye^{\frac{x}{y}}=C$.

4) $x-\frac{y^2}{x}=C$. 5) $xy-\sqrt{1+y^2}=C$. 6) $y\sin x+x^2y^2+a\cos y=C$.

7) $(x+y)\sqrt{a^2+y^2}=C$. 8) $x^3y-\frac{1}{2}x^4+xy^3-\frac{1}{2}y^4=C$. 9) $x\sin(x+y)=C$.

10) $3xy^2+x^2y+x^2+3y=C$. 11) $x^3y^2+7x=C$. 12) $x\sin y=C$.

13) $xe^y+ye^x=C$. 14) $\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=C$. 15) $x+arctg\frac{y}{x}=C$. 16) $xe^y-y^2=C$.

17) $x^y=C$. 18) $\sqrt{x^2+y^2}+\frac{y}{x}=C$. 19) $tg(xy)-\cos x-\cos y=C$.

20) $x+\frac{1}{3}(x^2+y^2)^{3/2}-\frac{y^2}{2}=C$.

21) $x^2y^3+y^3-3y=C$. 22) $\frac{x^4}{4}+\frac{3}{2}x^2y^2+\frac{y^4}{4}=C$. 23) $x+ye^{\frac{x}{y}}=C$.

24) $x-\frac{y^2}{x}=C$. 25) $xy-\sqrt{1+y^2}=C$. 26) $y\sin x+x^2y^2+a\cos y=C$.

27) $(x+y)\sqrt{a^2+y^2}=C$. 28) $x^3y-\frac{1}{2}x^4+xy^3-\frac{1}{2}y^4=C$.

29) $x\sin(x+y)=C$. 30) $3xy^2+x^2y+x^2+3y=C$.

31) $x^3y^2+7x=C$. 32) $x\sin y=C$. 33) $xe^y+ye^x=C$. 34) $\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=C$.

35) $x+arctg\frac{y}{x}=C$. 36) $xe^y-y^2=C$. 37) $x^y=C$. 38) $\sqrt{x^2+y^2}+\frac{y}{x}=C$.

39) $tg(xy)-\cos x-\cos y=C$. 40) $x+\frac{1}{3}(x^2+y^2)^{3/2}-\frac{y^2}{2}=C$.

§7. Интегралдоочу көбөйтүүчү

Эгерде $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$, (7.1)

теңдемеси үчүн $\dfrac{\partial M}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial N}{\partial x}$ теңдештиги аткарылбаганда, ушундай бир $\mu(x,y)$ функциясы табылып,

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0$$

теңдемеси үчүн

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}\equiv\frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \qquad (*)$$

теңдештиги орун алса, анда $\mu(x,y)$ интегралдоочу көбөйтүүчү деп аталат.

(*)ны $\mu(x,y)$га карата теңдеме катарында карап, аны ачып жазабыз:

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}M+\mu\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial\mu}{\partial x}N+\mu\frac{\partial N}{\partial x} \qquad (7.2)$$

теңдеме $\mu(x,y)$ га карата биринчи тартиптеги жекече туундулу дифференциалдык теңдеме. Анын чечимин табуу (7.1) дин чечимин табуу маселесинен оңой эмес. Бирок айрым учурларда ал оңой чыгарылат. Мисалы, интегралдоочу көбөйтүүчү бир өзгөрүлмөдөн көз каранды болсо.

7.1. $\mu(x,y)=\mu(x)$ ***болгон учур.***

Эгерде интегралдоочу көбөйтүүчү бир гана x өзгөрүлмөсүнөн көз каранды болсо, анда анын y өзгөрүлмөсү боюнча туундусу нөлгө барабар болот.

Ошондуктан (7.2) ден $\mu\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{d\mu}{dx}N+\mu\frac{\partial N}{\partial x}$ ны алабыз, ал $\mu(x)$ ге карата өзгөрүлмөлөрү бөлүктөнүүчү теңдеме:

$$\frac{d\mu}{dx}N=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\Rightarrow\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)}{N}dx.$$

Акыркы теңдемеде барабардыктын сол жагы x өзгөрүлмөсүнөн гана көз каранды ($\mu=\mu(x)$), анда оң жагы да x өзгөрүлмөсүнөн гана көз каранды болушу керек. Ошондуктан, $\mu(x)$ көрүнүшүндөгү интегралдоочу көбөйтүүчүнүн жашашы үчүн

$\psi(x)\equiv\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ шартынын орун алышы зарыл. Эгерде ушул шарт аткарылса, анда $\frac{d\mu}{\mu}=\psi(x)dx \Rightarrow \mu(x)=e^{\int\psi(x)dx}$ болот.

7.2. $\mu(x,y)=\mu(y)$ ***болгон учур.***

Эгерде интегралдоочу көбөйтүүчү бир гана y өзгөрүлмөсүнөн көз каранды болсо, анда анын x өзгөрүлмөсү боюнча туундусу нөлгө барабар болот. Ошондуктан (7.2) ден $\frac{d\mu}{dy}M+\mu\frac{\partial M}{\partial y}=\mu\frac{\partial N}{\partial x}$ ны алабыз, ал $\mu(y)$ ге карата өзгөрүлмөлөрү бөлүктөнүүчү теңдеме:

$$\frac{d\mu}{dy}M=\mu\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\Rightarrow\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)}{M}dy\ .$$

Акыркы теңдемеде барабардыктын сол жагы y өзгөрүлмөсүнөн гана көз каранды $(\mu=\mu(y))$, анда оң жагы да у өзгөрүлмөсүнөн гана көз каранды болушу керек. Ошондуктан, $\mu(y)$ көрүнүшүндөгү интегралдоочу көбөйтүүчүнүн жашашы үчүн

$\psi(y)\equiv\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}$ шартынын орун алышы зарыл. Эгерде ушул шарт аткарылса, анда $\dfrac{d\mu}{\mu}=\psi(y)dy \;\;\Rightarrow \mu(y)=e^{\int\psi(y)dy}$ болот.

7.3. $\mu(\omega(x,y))$ ***болгон учур.***

(7.2) ден $N\dfrac{d\mu}{d\omega}\dfrac{\partial\omega}{\partial x}-M\dfrac{d\mu}{d\omega}\dfrac{\partial\omega}{\partial y}=\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)\mu(\omega)$ ны алабыз, же

(эгерде $N\dfrac{\partial\omega}{\partial x}-M\dfrac{\partial\omega}{\partial y}\neq 0$ болсо)

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\omega'_x-M\omega'_y}d\omega.$$

Эгерде

$$\psi(\omega)\equiv\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\omega'_x-M\omega'_y}, \qquad (7.3)$$

болсо, анда

$\dfrac{d\mu}{\mu}=\psi(\omega)d\omega \;\;\Rightarrow \mu(\omega)=e^{\int\psi(\omega)d\omega}\equiv f(\omega)=f(\omega(x,y))$ болот.

(7.3) шартын жардамында биз мурдатан берилген интегралдоочу көбөйтүүчүнүн жашашы жөнүндөгү шарты табабыз. Мисалы, $\mu(xy)$ көрүнүшүндөгү интегралдык көбөтүүчү жашашы үчүн

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{Ny-Mx}\equiv\psi(xy)$$ шартынын аткарылышы зарыл.

$\mu(x+y)$ көрүнүшүндөгү интегралдык көбөтүүчү жашайт, эгерде $$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N-M}\equiv\psi(x+y)$$ шарты аткарылса.

μ интегралдоочу көбөйтүүчү чексизге айланган ийрилер өзгөчө чечим болушу мүмкүн.

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

1) $(x+y^2)dx-2xydy=0,\ \mu=\varphi(x)$.

2) $2xy\ln ydx+\left(x^2+y^2\sqrt{y^2+1}\right)dy=0,\ \mu=\varphi(y)$.

3) $y(1+xy)dx-xdy=0,\ \mu=\varphi(y)$.

4) $\frac{y}{x}dx+(y^3-\ln x)dy=0,\ \mu=\varphi(y)$.

5) $(x\cos y-y\sin y)dy+(x\sin y+y\cos y)dx=0,\ \mu=\varphi(x)$.

6) $(xy-x^2)y'+y^2-3xy-2x=0,\ \mu=\varphi(x)$.

7) $xy'+(\sin y-3x^2\cos y)\cos y=0,\ \mu=\varphi(y)$.

8) $(\ln y+2x-1)y'=2y,\ \mu=\varphi(y)$.

9) $(x^2+y^2)dx-2xydy=0,\ \mu=\varphi(x)$.

10) $2xydx+(y^2-3x^2)dy=0,\ \mu=\varphi(y)$.

11) $x(3y+2x)y'+3(y+x)^2=0,\ \mu=\varphi(x)$.

12) $(7xy^3+y-5x)y'+y^4-5y=0,\ \mu=\varphi(y).$

13) $x(xy-3)y'+xy^2-y=0, \qquad \mu=\varphi(x\cdot y).$

14) $(2x^2y+x)y'-x^2y^3+2xy^2+y=0,\ \mu=\varphi(x\cdot y).$

15) $xy^2dx+(x^2y-x)dy=0,\ \mu=\varphi(x\cdot y).$

16) $x(2y+x-1)y'-y(y+2x-1)=0,\ \mu=\varphi(x\cdot y).$

17) $(y^2+x^2+x)y'-y=0, \quad \mu=\varphi(x^2+y^2).$

18) $2y^3y'+xy^2-x^3=0, \qquad \mu=\varphi(x^2+y^2).$

19) $y'+p(x)y=q(x)y^n.$

20) $M(x+y)dx+N(x+y)dy=0.$

21) $(x^2+y^2+x)dx+ydy=0.$

22) $(x^2+y^2+y)dx-xdy=0.$

23) $ydy=(xdy+ydx)\sqrt{1+y^2}.$

24) $xy^2(xy'+y)=1.$

25) $y^2dx-(xy+x^3)dy=0.$

26) $(y-1/x)dx+dy/y=0.$

27) $(x^2+3\ln y)ydx=xdy.$

28) $y^2dx+(xy+tgxy)dy=0.$

29) $y(x+y)dx+(xy+1)dy=0.$

30) $y(y^2+1)dx+x(y^2-x+1)dy=0.$

31) $(x^2+2x+y)dx=(x-3x^2y)dy.$

32) $ydx-xdy=2x^3tg(y/x)dx.$

33) $y^2dx+(e^x-y)dy=0.$

34) $xydx=(y^3+x^2y+x^2)dy.$

35) $x^2y(ydx+xdy)=2ydx+xdy.$

36) $(x^2-y^2+y)dx+x(2y-1)dy=0.$

37) $(2x^2y^2+y)dx+(x^3y-x)dy=0.$

38) $(2x^2y^3-1)ydx+(4x^2y^3-1)xdy=0.$

39) $y(x+y^2)dx+x^2(y-1)dy=0.$

40) $(x^2-\sin^2 y)dx+x\sin 2ydy=0.$

41) $x(\ln y+2\ln x-1)dy=2ydx.$

42) $(x^2+1)(2xdx+\cos ydy)=2x\sin ydx.$

43) $(2x^3y^2-y)dx+(2x^2y^3-x)dy=0.$

44) $x^2y^3+y+(x^3y^2-x)y'=0.$

45) $(x^2-y)dx+x(y+1)dy=0.$

46) $y^2(ydx-2xdy)=x^3(xdy-2ydx).$

Жооптор.

1) $\mu=\dfrac{1}{x^2},\ x=Ce^{\frac{y^2}{x}}$. **2)** $\mu=\dfrac{1}{y},\ x^2\ln y+\dfrac{1}{3}\left(y^2+1\right)^{3/2}+C$.

3) $\mu=\dfrac{1}{y^2},\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{x^2}{2}=C$. **4)** $\mu=\dfrac{1}{y^2},\ \dfrac{1}{y}\ln x+\dfrac{1}{2}y^2=C$. **5)** $\mu=e^x$,

$(x\sin y+y\cos y-\sin y)e^x=C$. **6)** $\mu=x,\qquad \dfrac{x^2y^2}{2}-x^3y-\dfrac{1}{2}x^4=C$.

7) $\mu=\dfrac{1}{\cos^2 y},\ xtgy-x^3=C$. **8)** $\mu=y^2,\ 2x+\ln y=Cy$.

9) $\mu=\dfrac{1}{x^2}, x-y^2/x=C$. **10)** $\mu=y^4,\ \dfrac{x^2}{y^3-\dfrac{1}{y}=C}$. **11)** $\mu=x$,

$\dfrac{3}{2}x^2y^2+2x^3y+\dfrac{3}{4}x^4=C$. **12)** $\mu=\left(y^3-5\right),\ xy\left(y^3-5\right)^2+\dfrac{y^5}{5}-\dfrac{5}{2}y^2=C$.

13) $xy-\ln x-3\ln y=C$. **14)** $\ln x+\dfrac{2}{xy}+\dfrac{1}{2x^2y^2}=C$. **15)** $xy-\ln y=C$.

16) $y-x+1=C\sqrt[3]{xy}$. **17)** $y=arctg\dfrac{x}{y}+C$. **18)** $\dfrac{1}{2}x^2y^4-\dfrac{1}{6}x^6+\dfrac{1}{3}y^6=C$.

19) $\mu=y^{-n}e^{(1-n)\int p(x)dx}$. **20)** $\mu=\exp\displaystyle\int\frac{M'(x+y)-N'(x+y)}{M(x+y)-N(x+y)}d(x+y)$.

21) $2x+\ln\left(x^2+y^2\right)=c$. **22)** $x+arctg(x/y)=c$. **23)** $\sqrt{1+y^2}=xy+c$.

24) $2x^3y^3-3x^2=c$. **25)** $y^2=x^2(c-2y), x=0$. **26)** $\left(x^2-c\right)y=2x$.

27) $x^2+\ln y=cx^3,\ x=0$. **28)** $y\sin xy=c$. **29)** $x^2/2+xy+\ln|y|=c,\ y=0$.

30) $-x+1=xy(arctgy+c);\ y=0;\ x=0$.

31) $x+2\ln|x|+3y^2/2-y/x=c,\ x=0$. **32)** $\sin(y/x)=ce^{-x^2}$.

33) $\ln|y| - ye^{-x} = c,\ y = 0$. 34) $\ln\left(x^2/y^2+1\right) = 2y + c,\ y = 0$.

35) $x^2 y \ln(cxy) = -1,\ x = 0,\ y = 0$. 36) $x^2 + y^2 = y + cx,\ x = 0$.

37) $x^2 y + \ln|x/y| = c, x = 0, y = 0$. 38) $2xy^2 + (1/xy) = c,\ x = 0,\ y = 0$.

39) $\ln|(x+y)/y| + (y+yx)/(x+y) = c,\ y = 0, y = -x$.

40) $\sin^2 y = cx - x^2, x = 0$. 41) $y = c\ln x^2 y$. 42) $\sin y = -\left(x^2+1\right)\ln c\left(x^2+1\right)$.

43) $xy\left(c - x^2 - y^2\right) = 1,\ x = 0,\ y = 0$. 44) $y^2 = cx^2 e^{x^2 y^2}$.

45) $x\sqrt{1+\left(y^2/x^2\right)} + \ln\left(y/x + \sqrt{1+\left(y^2/x^2\right)}\right) = c,\ x = 0$.

46) $x^3 - 4y^2 = cy\sqrt[3]{xy}, x = 0,\ y = 0$.

§8. Туундуга карата чечилбеген теңдемелер

Туундуга карата чечилбеген биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдеме

$$F(x,y,y')=0, \qquad (8.1)$$

көрүнүшүндө болот. Эгерде бул теңдеме туундуга карата чечилсе, анда бир же бир нече $y'=f_k(x,y)$ $(k=1,2,...)$ теңдемелерге ээ болобуз. Туундуга карата чечилген теңдемелерди интегралдап (8.1)дин чечимин алабыз.

Мисал 1. $(y')^2-(x+y)y'+xy=0$.

Чыгаруу. Теңдемени y' ге карата алгебралык квадраттык теңдеме деп, $y'=x, y'=y$ чечимдерге ээ болобуз, аларды интегралдайбыз: $y=x^2/2+c$, $y=ce^x$. Бул эки чечим берилген теңдемени канаатандырат.

Бирок дайым эле (8.1) туундуга карата оңой чечилбейт. Ошондуктан аларды интегралдоонун башка усулдарын да кароого туура келет. Төмөнкү учурларын карайбыз.

8.1. $F(y')=0 \qquad (8.2)$

(8.2) жок дегенде бир чыныгы $y'=k_i$ тамырга ээ. k_i – турактуу, себеби (8.2) теңдемеси x, y терден көз каранды эмес. $y'=k_i$ теңдемесин интегралдап $y=k_i x+c \Rightarrow k_i=\frac{y-c}{x}$ табабыз.

k_i – (8.2)нин тамыры болгондуктан, $F\left(\frac{y-c}{x}\right)=0$- (8.2)нин интегралы болот.

Мисал 2. $(y')^7-(y')^5+y'+3=0$ теңдемесинин интегралы $\left(\frac{y-c}{x}\right)^7-\left(\frac{y-c}{x}\right)^5+\frac{y-c}{x}+3=0$ болот.

Эскертүү. Эгерде (8.2) нин тамырлары кандайдыр бир интервалды толук толтурса, анда ал $F\left(\frac{y-c}{x}\right)=0$ чечимдерден айрымаланган башка чечимдерге да ээ болушу мүмкүн.

Мисал 3. $y'+|y'|=0$.

Чыгаруу. Туундуга карата чечкенде $y'=k_i$ $(-\infty<k\le0)$, тамырларга ээ болобуз, тамырлар $(-\infty,0]$ интервалды толук толтурушат. Теңдемени тамырлары $y=kx+c$ $(-\infty<k\le0)$ болот, бирок андан сырткары да тамырлары бар, мисалы, $y=-x^2$ $(0\le x<\infty)$.

8.2. $F(x,y')=0$. (8.3)

Эгерде (8.3) туундуга карата чечилсе $y'=f_k(x)$, $(k=1,2,...)$, анда анын жалпы интегралы $y=\int f_k(x)dx+c$ болот.

Эгерде (8.3) туундуга карата оңой чечилбесе, t параметрин киргизип, (8.3)тү $x=\varphi(t)$, $y'=\psi(t)$ теңдемелер менен алмаштырган максатка ылайыктуу болот. $dy=y'dx$ жана $dx=\varphi'(t)dt$ болгондуктан, $dy=\psi(t)\varphi'(t)dt$ келип чыгат, аны интегралдасак $y=\int\psi(t)\varphi'(t)dt+c$ ны алабыз. Демек (8.3) түн интегралдары $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\int\psi(t)\varphi'(t)dt \end{cases}$ - параметрдик көрүнүштө аныкталат экен.

Эгерде (8.3) x өзгөрүлмөсүнө карата $x=\varphi(y')$ оңой чечилсе, дайым эле параметрди $y'=t$ көрүнүшүндө киргизген ыңгайлуу. Анда $x=\varphi(t),\ dy=y'dx=t\varphi'(t)dt \Rightarrow y=\int t\varphi'(t)dt+c$ болот.

<u>Мисал 4</u>. $x=(y')^3-y'-1$.

Чыгаруу. $y'=t$, анда $x=t^3-t-1$,

$dy=y'dx=t(3t^2-1)dt \Rightarrow y=\frac{3}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2+c$.

Теңдеменин чечими $\begin{cases} x=t^3-t-1 \\ y=3t^4/4-t^2/2+c \end{cases}$ болот.

Эгерде чектүү a саны табылып

$$\lim_{y'\to\infty} F(a,y')=0 \ \vee \ \lim_{y'\to-\infty} F(a,y')=0$$

орун алса, анда $x=a$ да (8.3)түн интегралы болот. Ал өзгөчө чечим болушу мүмкүн.

<u>Мисал 5</u>. $x\sqrt{1+(y')^2}=y'$.

Чыгаруу. $y'=tgt,\ -\pi/2<t<\pi/2$.

$x=\sin t,\ dy=y'dx=tgt\cos tdt=\sin tdt,\ y=-\cos t+c$.

Теңдеменин чечими параметрдик көрүнүштө $\begin{cases} x=\sin t \\ y=-\cos t+c \end{cases}$ болот, же t параметрин жоюп жиберсек: $x^2+(y-c)^2=1$ - айкын эмес көрүнүштөгү чечимин алабыз.

8.3. $F(y,y')=0$. (8.4)

Эгерде (8.4) туундуга карата чечилсе $y'=f_k(y)$, $(k=1,2,...)$, анда анын жалпы чечими $\int\frac{dy}{f_k(y)}=x+c$ $(k=1,2,...)$ болот.

$y=b_i$ түз сызыктары өзгөчө чечимдер болушу мүмкүн (b_i – $f_k(b)=0$ теңдеменин тамырлары).

Эгерде (8.4) туундуга карата оңой чечилбесе, t параметрин киргизип, (8.4)тү $y=\varphi(t)$, $y'=\psi(t)$ теңдемелер менен алмаштырган максатка ылайыктуу болот. $dy=y'dx$ экендигин эске алсак $\varphi'(t)dt=\psi(t)dx$ ээ болобуз, мындан

$$dx=\frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)} \quad \Rightarrow x=\int\frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}+c.$$

(8.4)түн жалпы чечими $\begin{cases} x=\int\frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}+c \\ y=\varphi(t) \end{cases}$ параметрдик көрүнүшүндө аныкталат.

Эгерде жекече учурда (8.4) изделүүчү функция y өзгөрүлмөсүнө карата чечилсе $y=\varphi(y')$, анда $y'=t$ деп, $\begin{cases} x=\int\frac{\varphi'(t)dt}{t}+c \\ y=\varphi(t) \end{cases}$ көрүнүшүндөгү жалпы чечимди алабыз.

$y=\varphi(y')$ теңдемеси $y=b$ көрүнүшүндөгү өзгөчө чечимдерге ээ болушу мүмкүн ($b=\varphi(0)$).

<u>Мисал 6</u>. $y^2(y'-1)=(2-y')^2$.

Чыгаруу. $2-y'=yt$ деп алабыз, $y^2(y'-1)=y^2t^2 \Rightarrow y'=1+t^2$, $y=(2-y')/t=1/t-t$. Демек теңдемени $y=1/t-t,\ y'=1+t^2$ параметрдик формада жазууга болот. Жалпы назариянын негизинде, төмөнкүгө ээ болобуз:

$dy=y'dx$, $(-1/t^2-1)dt=(1+t^2)dx,\ dx=-dt/t^2,\ x=1/t+c$.

Жалпы чечим $\begin{cases} x=1/t+c \\ y=1/t-t \end{cases}$ болот, же $y=x-c-\dfrac{1}{x-c}$. Өзгөчө чечимдери жок.

Мисал 7. $y=(y')^5+(y')^3+y'+5$.

Чыгаруу. $y'=t,\ y=t^5+t^3+t+5,\ dx=dy/y'=(5t^3+3t+1/t)dt$,

$x=5t^4/4+3t^2/2+\ln|t|+c$. Жалпы интеграл

$\begin{cases} x=5t^4/4+3t^2/2+\ln|t|+c \\ y=t^5+t^3+t+5 \end{cases}$ болот.

8.4. Жалпыланган бир тектүү теңдеме.

Def. Эгерде $F(x,y,y')=0$ теңдеменин сол жагындагы функция бардык аргументтери боюнча бир тектүү болсо б.а. $F(tx,t^k y,t^{k-1}y')=t^m F(x,y,y')$ орун алса, анда ал жалпыланган бир тектүү теңдеме деп аталат.

Жалпыланган бир тектүү теңдемеге $x=e^t,\ y=ze^{kt}$ өзгөртүп түзүүсүн колдонобуз (t – жаңы эрктүү өзгөрүлмө, z - жаңы белгисиз, изделүүчү функция).

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt}e^{-t}, \quad y' = \frac{dy}{dt}e^{-t}.$$

$y = ze^{kt}$ өзгөртүп түзүүсүн дифференцирлесек $\frac{dy}{dt} = \left(\frac{dz}{dt} + kz\right)e^{kt}$ ны алабыз. Демек

$y' = \frac{dy}{dt}e^{-t} = \left(\frac{dz}{dt} + kz\right)e^{(k-1)t}$. Ошондуктан $F(x, y, y') = 0$ теңдемеси

$F\left(e^t, ze^{kt}, \left(\frac{dz}{dt} + kz\right)e^{(k-1)t}\right) = 0$ көрүнүшкө келет.

F – жалпыланган бир тектүү болгондуктан

$e^m F\left(1, z, \left(\frac{dz}{dt} + kz\right)\right) = 0$ ээ болобуз, e^m ге кыскартабыз:

$F\left(1, z, \left(\frac{dz}{dt} + kz\right)\right) = 0$ бул (8.4) түрүндөгү тендеме.

8.5. Параметр кийирүүнүн жалпы усулу.

Мейли $F(x,y,y')=0$ (8.5)

теңдемеси $x=\varphi(u,v),\ y=\psi(u,v),\ y'=\tau(u,v)$ (8.6)

параметрдик көрүнүшүндө жазылсын, u, v нын бардык маанилеринде $F(\varphi(u,v),\psi(u,v),\tau(u,v))\equiv 0$ теңдештиги орун алсын.

(8.6)ни жана $dy=y'dx$ пайдаланып ар дайым (8.5)ди туундуга карата чечилген теңдемеге алып келүүгө болот.

Чындыгында, $dx=\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}du+\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}dv,\ dy=\dfrac{\partial\psi}{\partial u}du+\dfrac{\partial\psi}{\partial v}dv,\ y'=\tau(u,v)$

лардын бардыгын $dy=y'dx$ барабардыгына койсок:

$\dfrac{\partial\psi}{\partial u}du+\dfrac{\partial\psi}{\partial v}dv=\tau(u,v)\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}du+\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}dv\right)$, жана u ны эркүү өзгөрүлмө катарында кабыл алсак, анда биз туундуга карата чечилген

$$\frac{dv}{du}=f(u,v) \tag{8.7}$$

теңдемени алабыз. Эгерде биз анын жалпы чечимин тапсак $v=\omega(u,c)$ болот, анда v ны (8.6) нын алгачкы эки теңдемесине коюп (8.5)дин параметрдик көрүнүштөгү жалпы чечимин алабыз: $x=\varphi(u,\omega(u,c)),\ y=\psi(u,\omega(u,c))$.

8.5.1. Изделүүчү функцияга карата чечилген теңдеме.

Жогорудагы усулдун практикада колдонулушу эки кыйынчылыкка алып келет: (8.5) дин параметрдик формасын табуу, жана (8.7) ни интегралдоо.

Биринчи кыйынчылык оңой жоюлат, эгерде теңдеме изделүүчү функцияга же эрктүү өзгөрүлмөгө карата чечилген болсо.

Мейли (8.5) изделүүчү функцияга карата чечилген болсун

$$y = f(x,y'), \tag{8.8}$$

анда $u = x, v = y'$ деп алабыз, (8.6): $x = x,\ y = f(x,y'),\ y' = y'$ болот. Эгерде $y' = p$ деп алсак, анда $y = f(x,p) \Rightarrow dy = f'_x\,dx + f'_p\,dp$, жана $dy = pdx$ экендигин эске алсак анда $pdx = f'_x\,dx + f'_p\,dp$ теңдемесин алабыз. Аны dx ке бөлүп жиберебиз, натыйжада $p = f'_x + f'_p \dfrac{dp}{dx}$ - сызыктуу теңдемеге ээ болобуз.

Мейли бизге анын $p = \omega(x,c)$ чечими белгилүү болсун, анда аны $y = f(x,p)$ га коюп $y = f(x,\omega(x,c))$ - (8.8)дин жалпы чечимин алабыз.

$p = f'_x + f'_p \dfrac{dp}{dx}$ теңдеме $p = \gamma(x)$ өзгөчө чечимге ээ болушу мүмкүн, ошондуктан (8.8)дин өзгөчө чечими $y = f(x,\gamma(x))$ болот.

8.5.2. Эрктүү өзгөрүлмөгө карата чечилген теңдеме.

$$x = f(y, y'), \qquad (8.9)$$

теңдемесинин чечимин табабыз.

$y' = p$ деп алабыз, анда $x = f(y,p) \Rightarrow dx = f'_y\,dy + f'_p\,dp$, жана $dy = pdx$ экендигин эске алсак анда $dy = p(f'_y\,dy + f'_p\,dp)$ теңдемесин алабыз. Аны dy ке бөлүп жиберебиз, натыйжада сызыктуу теңдемеге ээ болобуз: $1 = p(f'_y + f'_p\dfrac{dp}{dy})$ же

$$f'_p\frac{dp}{dy} + f'_y = \frac{1}{p}.$$

Эгерде биз анын $p = \omega(y,c)$ чечимин тапсак, анда аны $x = f(y,p)$га коюп $x = f(y,\omega(y,c))$ - (8.9)дун жалпы чечимин алабыз.

Эгерде $p = \gamma(y)$ функциясы $f'_p\dfrac{dp}{dy} + f'_y = \dfrac{1}{p}$ теңдемесинин өзгөчө чечими болсо, анда (8.9)дун өзгөчө чечими $x = f(y,\gamma(y))$ болот, андан сырткары $y=b$ түз сызыгы да өзгөчө чечим болушу мүмкүн, b нын мааниси $F(x,b,0)=0$ теңдемеден табылат.

Лагранждын теңдемеси.

$y = \varphi(y')x + \psi(y')$ - Лагранждын теңдемеси деп аталат. Лагранждын теңдемеси ар дайым квадратурада интегралданат. Чындыгында, эгерде $y' = p$ деп алсак, анда теңдеме

$$y=\varphi(\mathrm{p})x+\psi(p) \qquad (*)$$

көрүнүшкө келет. Акыркы барабардыкты дифференцирлейбиз:

$\mathrm{d}y=\varphi(\mathrm{p})dx+x\varphi'(\mathrm{p})dp+\psi'(p)dp$, жана dy тин ордуна $dy=pdx$ ти коебуз:

$(\mathrm{p}-\varphi(\mathrm{p}))dx=(x\varphi'(\mathrm{p})+\psi'(p))dp \Rightarrow \dfrac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dp}}+\dfrac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}x=\dfrac{\psi'(p)}{\varphi(p)-p}$. Бул $x(p)$ га карата сызыктуу теңдеме. Сызыктуу теңдеменин чечими $x=A(p)c+B(p)$ көрүнүшүндө болот. Чечимди (*) га коюп y ти табабыз:

$$y=A_1(p)c+B_1(p),\quad A_1(p)=A(p)\varphi(p),\quad B_1(p)=B(p)\varphi(p)+\psi(p).$$

Лагранждын теңдемесинин жалпы чечиминин параметрдик формасы:

$\begin{cases} x=A(p)c+B(p) \\ y=A_1(p)c+B_1(p) \end{cases}$ көрүнүшүндө болот.

$y=p_i x+\psi(p_i)$ - түз сызыктары Лагранждын теңдемесинин өзгөчө чечимдери болушу мүмкүн, мында p_i лер $\varphi(p)-p=0$ теңдеменин тамырлары.

<u>Мисал</u>. $y=x(y')^2+(y')^2$.

Чыгаруу. $y'=p$, $y=xp^2+p^2$, $dy=p^2dx+2pxdp+2pdp$,

$$pdx=p^2dx+2pxdp+2pdp \Rightarrow \left(p-p^2\right)dx=2p(x+1)dp$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dp}+\frac{2}{p-1}x=\frac{2}{1-p},$$

Сызыктуу теңдемени интегралдап, жалпы чечимин табабыз:

$x=c/(p-1)^2-1$.

$$y = xp^2 + p^2 = \left(\frac{c}{(p-1)^2} - 1\right)p^2 + p^2 = \frac{cp^2}{(p-1)^2}.$$

Ошондуктан, теңдеменин жалпы чечиминин параметрдик формасы: $\begin{cases} x = c/(p-1)^2 - 1 \\ y = cp^2/(p-1)^2 \end{cases}$ көрүнүшүндө болот. p параметрин жоюу менен жалпы чечимди айкын көрүнүштө жазабыз: $y = \left(\sqrt{x+1} + c_1\right)^2 \quad \left(c_1 = \sqrt{c}\right)$.

$p^2 - p = 0$ теңдемеси эки тамырга ээ: $p=0$, $p=1$. Демек $y=0$, $y=x+1$ түз сызыктары өзгөчө чечим болушу мүмкүн. Алардын биринчиси өзгөчө, экинчиси жекече чечим болот (текшергиле!).

Клеронун теңдемеси. Лагранждын теңдемесинде $\varphi(y') \equiv y'$ болгон учур, б.а. $y = y'x + \psi(y')$ теңдеме Клеронун теңдемеси деп аталат.

Клеронун теңдемесин чыгаруу үчүн p параметрин кийиребиз, $y' = p$, анда Клеронун теңдемеси $y = px + \psi(p)$, көрүнүшкө келет. Акыркы барабардыкты дифференцирлейбиз: $dy = xdp + pdx + \psi'(p)dp$, dy тин ордуна $dy = pdx$ ти коебуз:

$$pdx = xdp + pdx + \psi'(p)dp \Rightarrow 0 = (x + \psi'(p))dp \Rightarrow dp = 0 \vee x + \psi'(p) = 0.$$

Биринчисинен $p=c$ маанисин алабыз, аны Клеронун теңдемесине коюп, анын жалпы чечимин алабыз:

$$y = xc + \psi(c).$$

Демек Клеронун теңдемесинин жалпы чечимин табуу үчүн теңдемеде y' ти c менен алмаштыруу керек.

Экинчисинен $x = -\psi'(p)$ти алабыз, бул маанини Клеронун теңдемесине коюп, $y = -p\psi'(p) + \psi(p)$ ны алабыз. Демек, Клеронун теңдемесинин өзгөчө чечиминин параметрдик формасы: $\begin{cases} y = -p\psi'(p) + \psi(p) \\ x = -\psi'(p) \end{cases}$ көрүнүшүндө болот.

Мисал. $y = y'x - y'^2/2$.

Чыгаруу. y′ ти с менен алмаштырып жалпы чечимди алабыз: $y = xc - c^2/2$. Өзгөчө чечимдин параметрдик формасы: $\begin{cases} y = p^2 - p^2/2 \\ x = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = p^2/2 \\ x = p \end{cases}$ көрүнүшүндө болот. p параметрин жоюп жиберсек, өзгөчө чечимдин айкын көрүнүшүн алабыз: $y = x^2/2$.

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

Жалпы жана өзгөчө чечимдерди тапкыла.

1) $y'^2 - y^2 = 0$. **2)** $8y'^3 = 27y$.

3) $(y'+1)^3 = 27(x+y)^2$. **4)** $y^2(y'^2+1) = 1$.

5) $y'^2 - 4y^3 = 0$. **6)** $y'^2 = 4y^3(1-y)$.

7) $xy'^2 = y$. **8)** $yy'^3 + x = 1$.

9) $y'^3 + y^2 = yy'(y'+1)$. **10)** $4(1-y) = (3y-2)^2 y'^2$.

11) $y'^2 + xy = y^2 + xy'$. **12)** $xy'(xy'+y) = 2y^2$.

13) $xy'^2-2yy'+x=0$. 14) $xy'^2=y(2y'-1)$.

15) $y'^2+x=2y$. 16) $y'^3+(x+2)e^y=0$.

17) $y'^2-2xy'=8x^2$. 18) $(xy'+3y)^2=7x$.

19) $y'^2-2yy'=y^2(e^x-1)$. 20) $y'(2y-y')=y^2\sin^2 x$.

21) $y'^4+y^2=y^4$. 22) $x(y-xy')^2=xy'^2-2yy'$.

23) $y(xy'-y)^2=y-2xy'$. 24) $yy'(yy'-2x)=x^2-2y^2$.

25) $y'^2+4xy'-y^2-2x^2y=x^4-4x^2$. 26) $y(y-2xy')^2=2y'$.

Параметрди кийирүү усулу менен чыгаргыла

27) $x=y'^3+y'$. 28) $x(y'^2-1)=2y'$.

29) $x=y'\sqrt{y'^2+1}$. 30) $y'(x-\ln y')=1$.

31) $y=y'^2+2y'^3$. 32) $y=\ln(1+y'^2)$.

33) $(y'+1)^3=(y'-y)^2$. 34) $y=(y'-1)\exp(y')$.

35) $y'^4-y'^2=y^2$. 36) $y'^2-y'^3=y^2$.

37) $y'^4=2yy'+y^2$. 38) $y'^2-2xy'=x^2-4y$.

39) $5y+y'^2=x(x+y')$. 40) $x^2y'^2=xyy'+1$.

41) $y'^3+y^2=xyy'$. 42) $2xy'-y=y'\,ln\,yy'$.

43) $y'=exp(xy'/y)$. 44) $y=xy'-x^2y'^3$.

45) $y=2xy'+y^2y'^3$. 46) $y(y-2xy')^3=y'^2$.

Лагранждын жана Клеронун тендемелерин чыгаргыла

47) $y=xy'-y'^2$. 48) $y+xy'=4\sqrt{y'}$.

49) $y=2xy'-4y'^3$.

50) $y=xy'-(2+y')$.

51) $y'^3=3(xy'-y)$.

52) $y=xy'^2-2y'^3$.

53) $xy'-y=\ln y'$.

54) $xy'(y'+2)=y$.

55) $2y'^2(y-xy')=1$.

56) $2xy'-y=\ln y'$.

Эгерде дифференциалдык теңдеменин жалпы чечими белгилүү болсо, анда анын өзгөчө чечимдерин тапкыла.

57) $y=cx^2-c^2$.

58) $cy=(x-c)^2$.

59) $y=c(x-c)^2$.

60) $xy=cy-c^2$.

61) Ийринин ар бир жанымасы жана координата октору менен түзүлгөн үч бурчтуктун аянты $2a^2$ га барабар болгон ийрилерди тапкыла.

Жооптор. 1) $y=ce^{\pm x}$. **2)** $y^2=(x+c)^3$, $y=0$.

3) $y+x=(y+x)^3$, $y=-x$. **4)** $(x+c)^2+y^2=1$, $y=\pm1$.

5) $y(x+c)^2=1$, $y=0$. **6)** $y\left(1+(x-c)^2\right)=1$, $y=0$, $y=1$.

7) $(y-x)^2=2c(x+y)-c^2$, y=0. **8)** $(x-1)^{4/3}+y^{4/3}=c$.

9) $4y=(x+c)^2, y=ce^x$. **10)** $y^2(1-y)=(x+c)^2, y=1$.

11) $y=ce^x, y=ce^{-x}+x-1$. **12)** $x^2y=c, y=cx$.

13) $x^2+c^2=2cy$, $y=\pm x$. **14)** $(x+c)^2=4cy$, $y=0$, $y=x$.

15) $\ln|1\pm2\sqrt{2y-x}|=2\left(x+c\pm\sqrt{2y-x}\right)$, $8y=4x+1$.

16) $4e^{-y/3}=(x+2)^{4/3}+c$. **17)** $y=2x^2+c$, $y=-x^2+c$.

18) $y = cx^{-3} \pm 2\sqrt{x/7}$. **19)** $\ln cy = x \pm 2e^{x/2}, y = 0$.

20) $\ln cy = x \pm \sin x,\ y = 0$.

21) $arctgu + \ln\sqrt{|(u-1)/(u+1)|} = \pm x + c,\ u = \sqrt[4]{1 - (1/y^2)}$, y=0, y=±1.

22) $x^2 + (cy+1)^2 = 1,\ y = 0$. **23)** $(cx+1)^2 = 1 - y^2, y = \pm 1$.

24) $2(x-c)^2 + 2y^2 = c^2,\ y = \pm x$. **25)** $y = ce^{\pm x} - x^2$. **26)** $y^2 = c^2 x - c$,

$4xy^2 = -1$. **27)** $x = p^3 + p, 4y = 3p^4 + 2p^2 + c$. **28)** $x = 2p/(p^2 - 1)$,

$y = 2/(p^2 - 1) - \ln|p^2 - 1| + c$. **29)** $x = p\sqrt{p^2+1},\ 3y = (2p^2 - 1)\sqrt{p^2+1} + c$.

30) $x = \ln p + (1/p),\ y = p - \ln p + c$. **31)** $x = 3p^2 + 2p + c, y = 2p^3 + p^2$,

y=0. **32)** $x = 2arctgp + c,\ y = \ln(1 + p^2),\ y = 0$.

33) $x = \ln|p| \pm \frac{3}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{p+1}-1}{\sqrt{p+1}+1}\right| \pm 3\sqrt{p+1} + c,\ y = p \pm (p+1)^{3/2},\ y = \pm 1$.

34) $x = e^p + c,\ y = (p-1)e^p, y = -1$. **35)** $x = \pm\left(2\sqrt{p^2 - 1} + \arcsin\frac{1}{|p|}\right) + c$,

$y = \pm p\sqrt{p^2 - 1}, y = 0$. **36)** $x = \pm\left(\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-p}}{1+\sqrt{1-p}}\right| + 3\sqrt{1-p}\right) + c, y = \pm p\sqrt{1-p}$, y=0.

37) $x = \pm 2\sqrt{1+p^2} - \ln\left(\sqrt{p^2+1} \pm 1\right) + c,\ y = -p \pm p\sqrt{p^2+1}, y = 0$.

38) $4y = c^2 - 2(x-c)^2, 2y = x^2$.

39) $x = -p/2 + c,\ 5y = c^2 - 5p^2/4,\ x^2 = 4y$.

40) $\pm xp\sqrt{2\ln cp} = 1,\ y = \mp\left(\sqrt{2\ln cp} - 1/\sqrt{2\ln cp}\right)$. **41)** $pxy = y^2 + p^3$,

$y^2(2p + c) = p^4$, y=0. **42)** $y^2 = 2cx - c\ln c,\ 2x = 1 + 2\ln|y|$.

43) $cx = \ln cy, y = ex$. **44)** $xp^2 = c\sqrt{|p|} - 1, y = xp - x^2 p^3, y = 0$.

45) $2p^2 x = c - c^2 p^2,\ py = c, 32x^3 = -27y^4$, y=0.

46) $y^2 = 2c^3x + c^2, 27x^2y^2 = 1$. **47)** $y = cx - c^2,\ 4y = x^2$.

48) $x\sqrt{p} = \ln p + c,\ y = \sqrt{p}(4 - \ln p - c)$, y=0. **49)** $x = 3p^2 + cp^{-2}$,

$y = 2p^3 + 2cp^{-1}$, y=0. **50)** $y = cx - c - 2$. **51)** $c^3 = 3(cx - y),\ 9y^2 = 4x^3$.

52) $x = c(p-1)^{-2} + 2p + 1,\ y = cp^2(p-1)^{-2} + p^2$, y=0, y=x-2.

53) $y = cx - \ln c,\ y = \ln x + 1$. **54)** $y = \pm 2\sqrt{cx} + c$, y=-x. **55)** $2c^2(y - cx) = 1$,

$8y^3 = 27x^2$. **56)** $xp^2 = p + c,\ y = 2 + 2cp^{-1} - \ln p$. **57)** $4y = x^4$.

58) $y = 0, y = -4x$. **59)** $y = 0, 27y = 4x^3$. **60)** y=$4x$. **61)** $xy = \pm a^2$.

§9. Изогоналдык траекториялар жөнүндөгү маселе

Def. Эгерде $F(x,y,c)=0$ жана $F_1(x,y,c_1)=0$ бир параметрлүү ийри сызыктардын көптүгү бирдей φ бурч менен кесилишсе, анда $F_1(x,y,c_1)=0$ ийри сызыктары $F(x,y,c)=0$ дин изогоналдык траекториялары деп аталат.

Жекече учурда, эгерде $\varphi=90^0$ болсо, анда изогоналдык траекториялар ортогоналдык траекториялар деп аталат.

F(x,y,c)=0 дин изогоналдык траекторияларын табуу үчүн анын дифференциалдык теңдемесин түзөбүз, ал үчүн аны x боюнча дифференцирлейбиз:

$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'=0$. Пайда болгон системадан:

$$\begin{cases} F(x,y,c)=0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'=0 \end{cases},$$ c параметрин жоебуз, натыйжада $y'=f(x,y)$ теңдемесине келебиз.

$M(x,y)$ чекитинде кесилишүүчү эки ийри сызыктардын арасындагы бурч деп, ийри сызыктардын ушул чекит аркылуу өткөн жанымалардын арасындагы бурчту айтабыз.

$F(x,y,c)=0$ ийрилерден бирөөсү L ди жана $F_1(x,y,c_1)=0$ ийрилерден L_1 ди алабыз. L ге M чекитинде жүргүзүлгөн жаныманын ox огу менен түзгөн бурчун α, ал эми L_1 ге M чекитинде жүргүзүлгөн жаныманын ox огу менен түзгөн бурчун β менен белгилейбиз.

Анда $\varphi=\pm(\beta-\alpha)$ же $\beta=\alpha\pm\varphi$ болот. Мындан

$$tg\beta=(tg\alpha\pm tg\varphi)/(1\mp tg\alpha tg\varphi)$$

$tg\varphi$ чоңдугу берилген, аны k менен белгилейбиз, $tg\alpha=y'=f(x,y)$, ошондуктан $tg\beta=(f(x,y)\pm k)/(1\mp kf(x,y))$ (*) болот.

Изогоналдык траекториялардын каалаган чекитинин координаталары менен ушул чекиттеги жаныманын бурчтук коэффициентинин арасындагы катышты, б.а. траекториялар көптүгүнүн дифференциалдык теңдемесин түзүп алдык. $tg\beta$ ны y' аркылуу белгилейбиз, анда (*) төмөндөгүдөй көрүнүшкө келет:

$$y'=(f(x,y)\pm k)/(1\mp kf(x,y)).$$

Акыркы дифференциалдык теңдеменин жалпы интегралы $F(x,y,c)=0$ ийрилер үчүн изогоналдык траекториялар болот, алар $F(x,y,c)=0$ ийрилерди бирдей φ бурч астында кесип өтөт.

Эгерде траекториялар ортогоналдык болсо, анда $\varphi=\frac{\pi}{2},\ \beta=\alpha\pm\frac{\pi}{2},\ tg\beta=-ctg\alpha=-\frac{1}{tg\alpha}=-\frac{1}{f(x,y)}$ жана ортогоналдык траекториялардын дифференциалдык теңдемеси:

$y'=-\frac{1}{f(x,y)}$ *же* $-\frac{1}{y'}=f(x,y)$ көрүнүшүндө болот.

Мисал. $x^2+y^2+2ay=0,\ a-\text{параметр}$, айланалардын ортогоналдык траекторияларын тапкыла.

Чыгаруу. Айланалардын дифференциалдык теңдемесин түзөбүз:

$$\begin{cases} x^2+y^2+2ay=0 \\ 2x+2yy'+2ay'=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a=-\left(x^2+y^2\right)/\,y \\ 2x+2yy'-y'\left(x^2+y^2\right)/\,y=0 \end{cases} \Rightarrow y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}.$$

Акыркы пайда болгон дифференциалдык теңдемеде y' ти $-\frac{1}{y'}$ менен алмаштырып ортогоналдык траекториялардын дифференциалдык теңдемесин алабыз:

$$\frac{1}{y'}=\frac{2xy}{y^2-x^2}$$ - бир тектүү теңдеме.

Теңдемени дифференциалдык формада жазып алабыз:

$2xydy-y^2dx+x^2dx=0$, теңдемени x^2 га бөлүп жиберебиз,

$$\frac{2xydy-y^2dx}{x^2}+dx=0 \Rightarrow d\left(\frac{y^2}{x}\right)+dx=0 \Rightarrow \frac{y^2}{x}+x=c \Rightarrow y^2+x^2-2cx=0.$$

Ортогоналдык тректориялар да айланалар экен, бирок алардын борбору ox огунда жайгашкан. (мукабадагы сүрөт)

Мисал. Борбору координаталар башталышында болгон түз сызыктардын боосунун изогоналдык траекторияларын тапкыла.

Чыгаруу. О чекитин координаталар башталышы деп кабыл алабыз. Эгерде изделүүчү ийри сызыктын каалаган $M(x,y)$ чекитиндеги жанымасынын ox огу менен түзгөн бурчун α, ушул чекиттин радиус-векторунун ox огу менен түзгөн бурчун φ деп белгилесек, $\alpha=\varphi+w$ болот. Бул барабардыктын эки жагынан тангенс алсак:

$tg\alpha = (tg\varphi + tgw)/(1 - tg\varphi tgw)$ болот. $tg\alpha = y'$, $tg\varphi = y/x$ болгондуктан, $y' = (y/x + k)/(1 - ky/x)$ дифференциалдык теңдемеге келебиз (мында $tgw=k$ деп алынган). Пайда болгон дифференциалдык теңдеме бир тектүү, анын чечимин табуу үчүн $y=zx$ өзгөртүп түзүүсүн колдонобуз. Натыйжада $\frac{1-kz}{z^2+1}dz = k\frac{dx}{x}$ теңдемеге келебиз. Жалпы интеграл: $arctgz - \frac{k}{2}ln(z^2+1) = k\,ln\,x - k\,ln\,c \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = ce^{(arctg\,y/x)/k}$ болот, уюлдук координаталарда жалпы чечим: $r = ce^{\varphi/k}$ көрүнүшүндө болот. Демек изделүүчү ийрилер логарифмдик спиралдар.

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

1) Ийрилердин ортогоналдык траекторияларын тапкыла.

а) $xy = c$, б) $y^2 + 2ax = a^2$, в) $y^2 = cx^3$

(2-15) ийрилердин изогоналдык траекторияларынын дифференциалдык теңдемесин түзгүлө жана аны чыгаргыла.

2) $y = cx^4, \varphi = 90^0$. **3)** $y^2 = x + c, \varphi = 90^0$.

4) $x^2 = y + cx, \varphi = 90^0$. 5) $x^2 + y^2 = a^2, \varphi = 45^0$.

6) $y = kx, \varphi = 60^0$. **7)** $3x^2 + y^2 = c, \varphi = 30^0$.

8) $y^2 = 2px, \varphi = 60^0$. **9)** $r = a + \cos\theta, \varphi = 90^0$.

10) $r = a\cos^2\theta, \varphi = 90^0$.   11) $r = a\sin\theta, \varphi = 45^0$.

12) $y = x\ln x + cx, \varphi = arctg2$.   13) $x^2 + y^2 = 2ax, \varphi = 45^0$.

14) $x^2 + c^2 = 2cy, \varphi = 90^0$.   15) $y = cx + c^3, \varphi = 90^0$.

Жооптор. **1)** а) гиперболалар $x^2 - y^2 = c$, б) $y^2 = 2cx + c^2$,

в) $x^2 + 3y^2/2 = c^2$. **2)** $4yy' = -x$; **3)** $y' = -2y$; **4)** $(x^2 + y)y' = -x$;

5) $(x+y)y' = y - x$; $(x-y)y' = x + y$; **6)** $(x \mp y\sqrt{3})y' = y \pm x\sqrt{3}$;

7) $(3x \mp y\sqrt{3})y' = y \pm 3x\sqrt{3}$; **8)** $(2x \mp y\sqrt{3})y' = y \pm 2x\sqrt{3}$; **9)** $r'\sin\theta = r^2$;

10) $r' = (rctg\theta)/2$; **11)** $r' = rctg(\theta \pm 45^0)$;

12) $(x+2y)y' = -3x - y$; $(3x+2y)y' = y - x$;

13) $y'(2xy \pm (x^2 - y^2)) = y^2 - x^2 \pm 2xy$; **14)** $x(1 + y'^2) = -2yy'$;

15) $yy'^3 + xy'^2 = -1$.

§10. $y'(x)=f(x,y)$ теңдемесинин чечиминин жашашы жана жалгыздыгы жөнүндөгү теоремалар

Төмөнкүдөй Кошинин маселесин карайбыз:

$$y'(x)=f(x,y), \tag{10.1}$$

$$y(x_0)=y_0, \tag{10.2}$$

Мында $f(x,y)$ – берилген функция, x_0, y_0 – берилген сандар.

(10.1)-(10.2) маселенин геометриялык мааниси: $A(x_0,y_0)$ чекити аркылуу өтүп, (10.1)ди канаатандырган интегралдык ийри сызыкты табуу.

(10.1)-(10.2) маселенин чечиминин жашашы жана жылгыздыгы жөнүндөгү теоремаларды келтиребиз.

Чечимдин жашашы жөнүндөгү теорема.

Пеанонун Теоремасы. Эгерде $f(x,y)$ функциясы $A(x_0,y_0)$ чекитин камтыган аймакта үзгүлтүксүз болсо, анда (10.1) теңдемеси x_0 го жетишээрлик жакын x тер үчүн, (10.2) шартын канаатандырган эң болбогондо бир $y=y(x)$ чечимине ээ болот.

Чечимдин жашашы жана жалгыздыгы жөнүндөгү теорема.

Теореманы келтирүүдөн мурда бизге керектүү болгон бир аныктаманы киргизели.

Def. Эгерде каалагандай x_1 жана x_2 чекиттери үчүн $[a,b]$ кесиндисинде жаткан f функциясынын өсүндүсү

$|f(x_1)-f(x_2)|\le L|x_1-x_2|$, *L-const*, барабарсыздыгын канаатандырса, анда $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндисинде Липшицтин шартын канаатандырат деп аталат.

$[a,b]$ кесиндиде чектүү туундуга ээ болгон каалагандай функция бул кесиндиде Липшицтин шартын канаатандырат. Чындыгында Лагранждын чектүү өсүндүлөр жөнүндөгү теоремасын эске алсак $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}=f'(\xi),\ \xi\in(a,b)$ болот. $[a,b]$ кесиндиде туунду чектүү болгондуктан $\forall\xi\in(a,b),\ \exists L>0-const:|f'(\xi)|\le L$.

Пикардын теоремасы. Мейли $f(x)$ функциясы $\Pi=\{(x,y):|x-x_0|\le a,\ |y-y_0|\le b\}$, $a>0$, $b>0$ тик бурчтугунда үзгүлтүксүз, $\forall x,y:|x-x_0|\le a,\ |y-y_0|\le b$ үчүн

$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|$ шартын канаатандырсын.

$(x,y)\in\Pi$ үчүн $M=\max\limits_{(x,y)\in\Pi}|f(x,y)|,\ h=\min(a,b/M)$ болсун.

Анда (10.1)-(10.2) Коши маселеси $[x_0-h,\ x_0+h]$ аралыгында жалгыз гана чечимге ээ болот.

Далилдөө. Пикардын методун колдонобуз. (10.1)-(10.2) Коши маселеси

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,y(s))ds \tag{10.3}$$

интегралдык теңдемесине эквиваленттүү. Чындыгында (10.1)-(10.2) Коши маселесинин чечимин $y = \varphi(x)$ деп алсак, б.а.

$$\frac{d\varphi}{dx} \equiv f(x, \varphi(x)),\ \varphi(x_0) = y_0.$$

Акыркы теңдештиктин эки жагын dx ке көбөйтүп, x_0 дон x ке чейин интегралдап анан баштапкы шартты колдонуп төмөнкүнү алабыз:

$$\varphi(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))ds,$$

Б.а. $\varphi(x)$ функциясы (10.3) интегралдык теңдемесинин чечими болот. Тескерисинче, $\varphi(x)$ функциясы (10.3) интегралдык теңдемесин канаатандырсын

$$\varphi(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))ds.$$

Эгерде бул теңдештиктин эки жагына $x = x_0$ маанисин койсок: $\varphi(x_0) = y_0$, б.а. $\varphi(x)$ функциясы (10.2) баштапкы шартын канаатандырат. Ушул эле теңдештиктин эки жагын x боюнча туундуласак, (10.1) теңдемесине келебиз.

Демек, (10.3) интегралдык теңдемесинин чечиминин жашашы жана жалгыздыгын далилдесек, теореманын далилдөөсү келип чыгат.

Интегралдык теңдеменин чечиминин жашашын удаалаш жакындатуу усулу менен далилдейбиз.

Нөлүнчү жакындатуу функциясы үчүн $y_0(x) \equiv y_0$ деп алабыз, ал эми калган жакындатууларды төмөнкү рекуррентик формула менен аныктайбыз:

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))ds, \quad n = 1,2,... \tag{10.4}$$

$y_n(x)$ функцияларын ушундай түзүү процесси – удаалаш жакындатуу деп аталат. Аны чексизге улантууга болот. $n=1,2,\ldots$ болгондо биз

$$y_0(x),\ y_1(x),\ y_2(x),\ldots,\ y_n(x),\ldots \tag{10.5}$$

Функциялардын удаалаштыгын алабыз.

$|x - x_0| \le h$ болсо, (10.5) удаалаштыгынын бардык мүчөлөрү Π тик бурчтугунда жата тургандыгын көрсөтөбүз.

$$|y_n(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))ds\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(s, y_{n-1}(s))|ds\right|.$$

Мындан, $n=1$ болгондо:

$$|y_1(x) - y_0| \le M|x - x_0| \le Mh = M\min(a, b/M) \le b \Rightarrow y_1(x) \in \Pi.$$

Математикалык индукция принцибин пайдаланып $y_{n-1}(x) \in \Pi$ ден $y_n(x) \in \Pi$ келип чыгарын көрсөтөлү:

$$|y_n(x) - y_0| \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(s, y_{n-1}(s))|ds\right| < M|x - x_0| \le Mh = M\min(a, b/M) \le b.$$

Ошентип, бардык n үчүн $y_n(x) \in \Pi$ болот.

Эми (10.4) удаалаштыгы $[x_0 - h, x_0 + h]$ кесиндисинде (10.3) интегралдык теңдемесин үзгүлтүксүз чечимине бир калыпта жыйнала тургандыгын көрсөтөбүз.

$y_n(x)$ ди төмөнкүчө жазууга болот:

$$y_n(x) = y_1(x) + (y_2(x) - y_1(x)) + (y_3(x) - y_2(x)) + \ldots + (y_n(x) - y_{n-1}(x)).$$

Ошондуктан (10.4) удаалаштыгынын бир калыпта жыйнала тургандыгын далилдөө үчүн

$$y_1(x) + (y_2(x) - y_1(x)) + (y_3(x) - y_2(x)) + \ldots + (y_n(x) - y_{n-1}(x)) + \ldots \qquad (10.6)$$

чексиз катарын бир калыпта жыйналуучулугун далилдөө жетиштүү болот.

Ал үчүн $y_n(x) - y_{n-1}(x)$ айырмасын баалайбыз:

$n=1$ болгондо, (10.4) төн

$$|y_1(x) - y_0(x)| \le M|x - x_0|, \qquad (10.7)$$

барабарсыздыгын алабыз.

Андан ары, $n=2,3,\ldots$ болгондо ушунун өзүндөй эле (10.4) төн

$$|y_2(x) - y_1(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} (f(s, y_1(s)) - f(s, y_0(s)))ds\right| \le$$

$$\le L\left|\int_{x_0}^{x} |y_1(s) - y_0(s)|ds\right| \le LM\left|\int_{x_0}^{x} |s - x_0|ds\right| \le ML\frac{|x - x_0|^2}{2}$$

$$|y_3(x) - y_2(x)| \le L\left|\int_{x_0}^{x} |y_2(s) - y_1(s)|ds\right| \le L^2 M\frac{|x - x_0|^3}{3!}.$$

Жалпысынан

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \le L^{n-1} M\frac{|x - x_0|^n}{n!}, \ x \in [x_0 - h, x_0 + h] \text{ болот.}$$

Ошондуктан,

$$M|x-x_0|+LM\frac{|x-x_0|^2}{2!}+...+L^{n-1}M\frac{|x-x_0|^n}{n!}+... \qquad (10.8)$$

катары $|x-x_0|$ дун бардык маанилеринде жыйналат. Себеби жалпы мүчөсү $L^{n-1}M\frac{h^n}{n!}$ болгон жыйналуучу сандык катар менен мажорантталат. Ошондуктан (10.6) катары да бир калыпта жыйналат жана анын суммасы болгон $y(x)$ функциясы $[x_0-h, x_0+h]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз функция болот. Анын графиги Π тик бурчтугунан чыкпайт. Демек $\int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds$ интегралы мааниге ээ болот.

$\left|\int_{x_0}^{x}(f(s,y(s))-f(s,y_{n-1}(s)))ds\right| \le L\left|\int_{x_0}^{x}|y(s)-y_{n-1}(s)|ds\right|$ болгондуктан,

(10.4) барабардыгында $n\to\infty$ үчүн пределге оң жагынан да, сол жагынан да өтсө болот. Ошондуктан $y(x)$ функциясы (10.3) теңдемесин канаатандырат.

$[x_0-h, x_0+h]$ кесиндисинде интегралдык теңдеменин чечими жалгыз экендигин далилдейбиз. Далилдөөнү карама-каршысынан далидөө усулу менен жүргүзөбүз.

Мейли (10.3) теңдемесин $y(x)$ тен айрымаланган, $[x_0-h, x_0+h]$ интервалында аныкталган үзгүлтүксүз $z=z(x)$ деген дагы бир чечими бар болсун $y(x)\ne z(x)$.

$$z(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, z(s))ds, \; z(x_0) = y_0. \qquad (10.9)$$

(10.9)дан (10.3)тү мүчөлөп кемитебиз:

$$|z(x) - y(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} (f(s, z(s)) - f(s, y(s)))ds \right| \le L\alpha |z(x) - y(x)|, |x - x_0| \le \alpha .$$

Мындан $|z(x) - y(x)| \le L\alpha |z(x) - y(x)|, \; |x - x_0| \le \alpha$ келип чыгат. Акыркы барабарсыздык $|z(x) - y(x)| = 0$ болгондо гана аткарылат. Бул $z(x)$ чечими $y(x)$ менен дал келет дегенди түшүндүрөт. Теорема далилденди.

$y(x)$ так чечимди n - жакындатуусу $y_n(x)$ менен алмаштырганда келип чыккан каталык

$$|y(x) - y_n(x)| \le \frac{ML^{n-1}}{n!} h^n \qquad (10.10)$$

менен бааланат.

Удаалаш жакындатуу усулун колдонуп эсептегенде $|y_{n-1} - y_n|$ чоңдугу берилген каталыктан ашпай калган n де токтоо керек.

Мисал. $f(x,y)=y^2 \sin x + x^{100}$ функциясы $\Pi=\{(x,y): |y| \le 1\}$ тилкесинде y боюнча Липшицтин шартын x ке карата бир калыпта канаатандыраарын көрсөткүлө жана Липшицтин турактууларынын арасынан эң кичинесин тапкыла.

Чыгаруу. Мейли $y_1, y_2 \in \Pi$ болсун. Төмөнкү айырманы баалайбыз:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |y_1^2 \sin x - y_2^2 \sin x| = |\sin x| \cdot |y_1 + y_2| \cdot |y_1 - y_2|,$$

$\sup\limits_{(x,y)\in\Pi} |\sin x|\cdot|y_1+y_2| = 2$ болгондуктан, $|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \le 2|y_1-y_2|$

болот. Бул болсо $f(x,y)$ функциясы П тилкесинде у боюнча Липшицтин шартын x ке карата бир калыпта канаатандыраарын билдирет. Липшицтин турактууларынын ичинен эң кичинеси $L=2$ болот.

Мисал. $y'=x+y^2$, $y(0)=0$ теңдемесин $\Pi=\{(x,y): |x|\le 1, |y|\le 1\}$ квадратында удаалаш жакындатуу усулу менен чыгаргыла.

Чыгаруу. $f(x,y)=x+y^2$ функциясы Π квадратында y боюнча Липшицтин шартын x ке карата бир калыпта канаатандырат.

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| = |y_1^2-y_2^2| = |y_1+y_2|\cdot|y_1-y_2| \le 2|y_1-y_2|.$$

$M = \max\limits_{(x,y)\in\Pi} f(x,y) = 2$ болгондуктан, $h=\min(1,1/2)=1/2$ болот.

Демек, берилген Коши маселесинин чечиминин Пикар жакындатуулары $[-1/2,\ 1/2]$ аралыгында жыйналат.

Жакындатуулар $y_{n+1}(x) = \int\limits_0^x \left(s+y_n^2(s)\right)ds$, $n=0,1,2,\ldots$

формуласы менен эсептелинет. $y(x)$ чечими менен табылган n- жакындатуунун айырмасы (10.10) формуласы менен

бааланат: $|y(x)-y_n(x)| \le \dfrac{2\cdot 2^{n-1}}{n!}\cdot\dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{n!}$.

Демек, n - жакындатуунун абсолюттук каталыгы $1/n!$ дан ашпайт экен.

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүлөөр

1) $f(x,y)=(3+\sin x)y^{1/2}$ функциясы $\Pi=\{(x,y): \quad 0\le y\le 1\}$ тилкесинде y боюнча Липшицтин шартын канаатандырбай турганын көрсөткүлө.

2) $f(x,y)=y^{2/3}\cos x$ функциясы $\Pi=\{(x,y): -1\le y\le 1\}$ тилкесинде y боюнча Липшицтин шартын канаатандырбай тургандыгын көрсөткүлө.

Коши маселесинин чечимин удаалаш жакындатуу усулу менен тапкыла.

3) $y'=y,\ y(0)=1.$

4) $y'=y+x,\ y(0)=1.$

5) $y'=3x+y^2,\ y(0)=1.$

6) $y'=x^2+y^2,\ y(0)=0, \quad -1\le y\le 1,\ -1\le x\le 1.$

Төмөнкү Коши маселесинин чечимин $y_0(x),\ y_1(x),\ y_2(x)$ удаалаш жакындатууларын тапкыла

7) $y'=x^2-y^2,\ y(-1)=0.$

8) $y'=x+y^2,\ y(0)=0.$

9) $y'=2y-2x^2-3,\ y(0)=2.$

10) $xy'=2x-y,\ y(1)=2.$

11) $y'=1-(1+x)y+y^2,\ y(0)=1.$

12) $y'=y^2+3x^2-1,\ y(1)=1.$

13) $y'=x-y^2,\ y(0)=0.$

14) $y'=1+x\sin y,\ y(\pi)=2\pi.$

Жооптор.

3) $y(x)=e^x$. **4)** $y(x)=2e^x-x-1$. **7)** $y_0(x)=0$, $y_1(x)=(1+x^3)/3$,

$y_2(x)=(33-14x+42x^3-7x^4-2x^7)/126$. **8)** $y_0(x)=0$, $y_1(x)=x^2/2$,

$y_2(x)=x^2/2+x^5/20$. **9)** $y_0(x)=1$, $y_1(x)=1+x+x^2/2$,

$y_2(x)=1+x+x^2+x^3/6$. **10)** $y_0(x)=2$, $y_1(x)=2+x-2x^3/3$,

$y_2(x)=2+x+x^2-2x^3/3-x^4/4$. **11)** $y_0(x)=2$, $y_1(x)=2x-\ln x$,

$y_2(x)=2+\ln^2 x$.

Тиркеме

Эйлер, Эйлер-Коши жана Рунге-Кутта методдору аркылуу I тартиптеги диффереациалдык теңдеме үчүн Коши маселесинин сандык чечиминин Borland Pascal тилиндеги программасынын листинги

```
Program DifEquationofFirstOrder;
Uses crt;
Const c:array [1..4] of real=(0,0.5,0.5,1);
Type
     Coef:=array[0..4] of real;
Var I,j,m:integer;
a,b,h,x,y,y1,y2,y3,eps:real;
k0,k:coef;
ch:char;
function f(x,y:real):real;
begin
     f:=x+y;
end;
begin
     ClrScr;
Writeln ('[a,b] кесиндисинин учтарын киргизгиле');
Read (a,b);
Writeln ('y(x0)=y0 баштапкы маанисин киргизгиле');
Read(y);
Writeln ('[a,b] кесиндиде функциянын экстремум маанилерин киргизгиле');
Read (m);
Writeln ('эпсилонду киргизгиле');
Readln (eps);
x:=a; h:=(b-a)/m;y1:=y; y2:=y; y3:=y;
writeln ('Эйлер усулу, Эйлер-Коши усулу, Рунге-Кутта усулу');
writeln ('x=,'x:5:2, 'y1=,'y1:9:6, 'y2=,'y2:9:6,'y3=,'y3:9:6');
for i:=1 no m do
     begin
          y1:=y1+h*f(x,y1);    {←-Эйлер усулу}
for j:=1 to 2 do
     k0[j]:=h*f(x+2*c[j]*h, y2+2*c[j]*k0[j-1]);
     y2:=y2+(k0[1]+k0[2])/2;  {←-Эйлер –Коши усулу}
for j:=1 to 4 do              {←-Рунге-Кутта усулу}
k[j]:=h*f(x+c[j]*h, y3+c[j]*k[j-1])/eps;
y3:=y3+(k[1]+2*k[2]+2*k[3]+k[4])/6;
x:=x+h;
writeln ('x=,'x:5:2, 'y1=,'y1:9:6, 'y2=,'y2:9:6,'y3=,'y3:9:6');
end;
readln    end.
```

Адабияттар

1. Иманалиев М.И. жана башкалар. Кадимки дифференциалдык теңдемелер жана алардын колдонулушу. Бишкек:Турар, 2006.-267б.
2. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва: Вышэйшая школа, 1974.-765с.
3. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. Москва:Наука, 1969.-424с.
4. Гутер Р.С., Янпольский А.Р. Дифференциал тенгламалар. Ташкент: Укитувчи, 1978.-322б.
5. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва: Наука, 1974.-331с.
6. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Москва: Наука, 1979.-126с.
7. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Москва: Высшая школа, 1978.-287с.

КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН БИЛИМ БЕРҮҮ ЖАНА ИЛИМ МИНИСТРЛИГИ

Ош мамлекеттик университети

Математика жана маалыматтык технологиялар факультети

ТУРСУНОВ Д.А.

БИРИНЧИ ТАРТИПТЕГИ КАДИМКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР

окуу колдонмо

Ош - 2009

Редактор Кудайберди уулу Бакытбек
Техн.редактор Ибрагим Дадаев
Корректору Сайкал Карагулова
Компьютердик калыпка салган Нурлан Кыбыраев

Терүүгө 15.12.09. берилди. Басууга 23.12.09. кол коюлду.
№1 офсет кагазы. Кагаздын форматы 60x84 $^{1}/_{16}$. 5,5 басма табак.

«Кагаз ресурстары» ЖЧК
Ош шары, Курманжан Датка көчөсү 287
тел.:(3222) 2 52 50